

עבודת קיץ מומלצת לתלמידים העולים לכיתה יא' בהקבצת 5 יח' מספר התרגול של ארכימדס בשאלון 581

מורים ותלמידים יקרים! מצורפת עבודת הקיץ המומלצת מהספר בהוצאת ארכימדס:
"הכנה לבחינות הבגרות במתמטיקה - שאלון 581 - מהדורת 2018" (מצורפת לקובץ זה חוברת השלמות).
מורים המייעדים את כיתות 581 שלהם לרכוש את הספר בתחילת השנה הבאה בכיתה יא', יוכלו כעת לתת לתלמידים את עבודת הקיץ מהספר.

העבודה מתמקדת בתרגילים שבפרקי ההקניה בתחילת הספר, המשקפים את הרמה הנדרשת מהתלמידים בסיום כיתה י' ועל כן אינם אינטגרטיביים עם תחומי ידע נוספים בשאלון 581.
כל מורה יוכל לבחור עבור כיתתו את הנושאים שהוא מעוניין שיתרגלו מתוך הרשימה המלאה.

גיאומטריה - משפטי תאלס, חוצה זווית ודמיון משולשים:

ללא מעגל: מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת רשימת המשפטים בספר בעמודים 53-57 ובעמוד 60 למעלה.
לפתור בעמוד 61 והלאה: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 18, 21, 23.

כולל מעגל: מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת רשימת המשפטים בספר בעמודים: 57-59 ובעמוד 60 למטה.
התרגילים כוללים שימוש במשפטי תאלס, חוצה זווית ודמיון: לפתור החל מעמוד 67: 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 14.

חקירות פונקציה:

- **פונקציית פולינום:** מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים בספר בעמ' 77-80.
לפתור בחוברת העבודה המצורפת פה: עמוד (22, 10, 11, 12. החל מעמוד 23) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
עמוד (25) תרגיל החשיבה מרובה הסעיפים.
- **פונקציה רציונאלית (מנה):** מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים בעמ' 81-83. לפתור בעמ' 84 והלאה: 1, 2, 3, 5 (ללא סעיף ג'), 6, 8, 9, 11 (ללא סעיף ג'), 14.
מומלץ לפתור בעמ' 90 את התרגיל מרובה סעיפי החשיבה (ללא סעיפים: ו', ז', 3, ז', 8, 9).
- **פונקציית שורש:** מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים בספר בעמ' 91-93.
לפתור בעמוד 94 והלאה: 1 (ללא סעיף ג'), 2, 3, 4, 8, 9, 10, 12 (ללא סעיף ג'), 14 (ללא סעיף ב'), 16 (ללא סעיף ג'), 273 (7 (ללא סעיף ד'), 243) 7 (ללא סעיף ד').
- **גרף הנגזרת:** מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים בספר בעמ' 80. לפתור:
בחוברת העבודה המצורפת: עמ' 27 ב', ד'. עמ' 28, 1, 4. עמ' 29, 2, 4. עמ' 30, 1, 3, 5. עמ' 31) כולו.

בעיות קיצון:

- **פונקציית פולינום:** מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים בחוברת בעמ' 11-12. לפתור:
גרפים: 1, 2, 3, 4. גיאומטריות: 15, 14, 13 (15). מספרים: 17, 25, 28, 30.
- **פונקציה רציונאלית (מנה):**
גרפים: 5, 6, 7. גיאומטריות: 16, 17, 18. מספרים: 18, 31, 32, 33.
- **פונקציית שורש:**
גרפים: 9, 11, 12. גיאומטריות: 16, 20, 22. מספרים: 18, 36, 37, 38.

טריגונומטריה במישור (במשולש ישר זווית ומשפטי הסינוס והקוסינוס)

מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים המופיעים בחוברת העבודה בהמשך קובץ זה בעמודים 6-7.
לפתור בחוברת בעמוד 8 והלאה: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13.

גיאומטריה אנליטית (הקו הישר)

מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת הנוסחאות המצויות בחוברת העבודה הזו בעמוד הבא (עמ' 2).
לפתור בחוברת בעמוד 3 והלאה: 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 14, 15.

בעיות תנועה: מומלץ לרענן את הזיכרון בקריאת ההסברים והדוגמאות בספר 581 בעמודים 9-10.
לפתור בחוברת העבודה המצורפת פה החל מעמוד 20 והלאה: 6, 7, 8, 9, 13, 16.
לפתור בספר 581 של ארכימדס החל מעמוד 10 והלאה: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9.

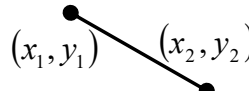
חופש נעים!

גיאומטריה אנליטית

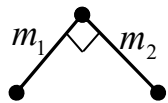
הקו הישר

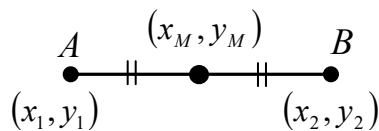
פתרון תרגילים בנושא הקו הישר דורש היכרות עם מספר נוסחאות המאפשרות לנו למצוא מרחקים, שיפועים ושיעורי נקודות. נציג את הנוסחאות הללו:

שיפועים ויחסים

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות יחושב לפי הנוסחה: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. 

משוואת קו ישר ששיפועו (m) העובר בנקודה (x_1, y_1) היא: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שני ישרים המאונכים זה לזה, שיפועיהם $(m_1$ ו- $m_2)$ הופכיים ונגדיים: $m_1 \cdot m_2 = -1$. 
 הופכים את השבר ואת הסימן, כך לדוגמא שיפועים של אנכים: $\frac{3}{4}$ ו- $-\frac{4}{3}$ או: $\frac{1}{2}$ ו- -2 או: 1 ו- -1 .



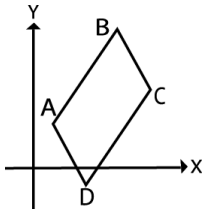
אמצע הקטע AB המופיע בשרטוט הוא הממוצע של שיעורי קצות

הקטע: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ו- $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

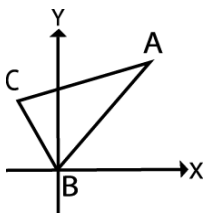
המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ניתן לחישוב באמצעות הנוסחה: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

תרגילים - הקו הישר

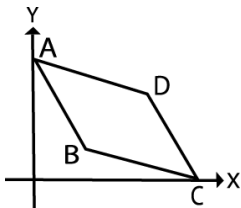
* תרגילים נוספים בנושא זה מופיעים בבחינות המתכונת שבספר וניתן לאתרם במפתח הנושאים שבתחילתו. התרגילים שבבחינות המתכונת ברובם אינטגרטיביים ומורכבים יותר.



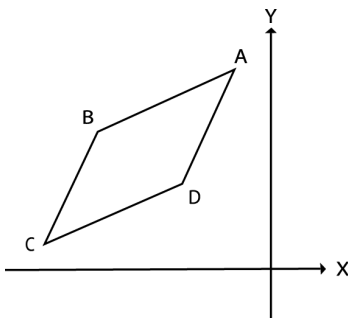
1. במקבילית ABCD נתונים שיעורי הקדקודים: $A(1, 2)$, $B(4, 6)$ ו- $D(2, -1)$.
 - א. מצא את שיעורי מפגש האלכסונים במקבילית.
 - ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
 - ג. חשב את היקף המקבילית.



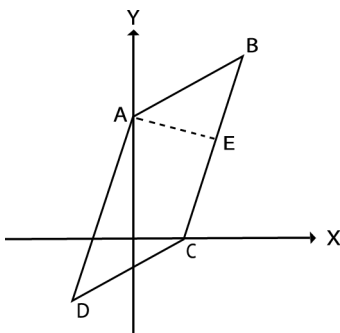
2. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AC=AB$) הנקודה E היא אמצע הבסיס BC.
 - הקדקוד B נמצא בראשית הצירים.
 - נתון: $A(4, 8)$. משוואת הגובה AE היא: $y = x + 4$.
 - א. מצא את שיעורי הנקודות E ו-C.
 - ב. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.



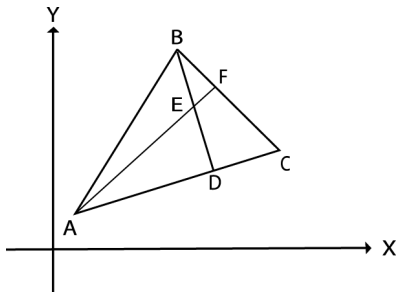
3. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה E. נתון: $D(4, 4)$.
 - א. מצא את שיעורי הקדקוד B.
 - ב. מצא את משוואת האלכסון AC.
 - ג. נתון: הקדקוד A נמצא על ציר ה-y והקדקוד C נמצא על ציר ה-x. מצא את שיעורי הנקודות A ו-C.
 - ד. חשב את שטח המעוין.
 - ה. חשב את היקף המעוין.



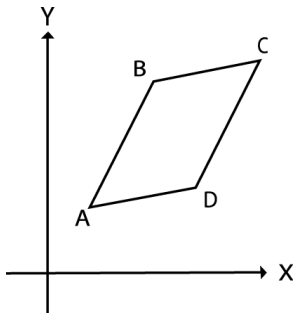
4. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה E. משוואת האלכסון AC היא: $y = x + 9$. נתון הקדקוד $B(-6, 5)$.
 - א. מצא את שיעורי הנקודות D ו-E.
 - ב. הקדקוד A נמצא על הישר $y = 7$. מצא את שיעורי הקדקוד C.
 - ג. חשב את שטח המעוין ABCD.



5. במקבילית ABCD, הקדקודים A ו-C נמצאים על ציר ה-y ועל ציר ה-x בהתאמה. הישר AE הוא הגובה לצלע BC ומשוואתו $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
 - משוואת הצלע CD היא: $y = \frac{x}{2} - 1$.
 - א. מצא את שיעורי קדקודי המקבילית.
 - ב. חשב את שטח המקבילית.
 - ג. מצא את משוואת קטע האמצעים BE, המקביל לצלע BE.

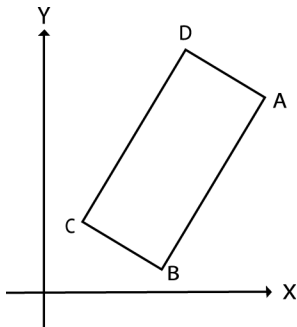


6. במשולש $\triangle ABC$ נתונים הקדקודים $A(1,1)$ ו- $B(5,9)$.
הגבהים BD ו- AF נחתכים בנקודה $E(6,6)$.
א. מצא את משוואת הישר BC.
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
ג. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.

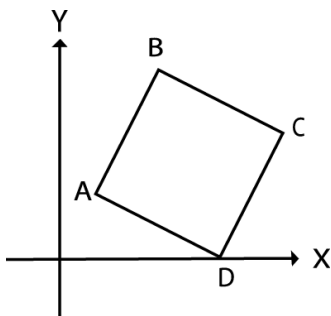


7. במקבילית ABCD משוואת הישר AB היא: $y = 3x - 3$ ומשוואת הישר AD היא: $y = \frac{1}{4}x + 2.5$. אחד מקדקודי המקבילית בנקודה $(8,10)$.
א. מצא את משוואת האלכסון BD.
ב. שרטט את המקבילית במדויק על מערכת הצירים. מהנקודות C ו- D מורידים אנכים לציר ה- x, אשר חותכים את ציר ה- x בנקודות E ו- F בהתאמה. חשב את שטח הטרפז CDFE.

8. במקבילית ABCD נתון: $A(-1,5)$ ו- $C(4,5)$. הנקודה M נמצאת על הצלע CD כך ש-AM הוא הגובה היוצא מהקדקוד A לצלע CD. שיפוע הצלע CD הוא 2.
א. חשב את אורכו של הגובה AM.
ב. נתון: שיפוע הצלע AD הוא 8. חשב את שטח המקבילית.



9. שתיים מצלעותיו של מלבן מונחות על שני הישרים: $y = 4x - 6$ ו- $y = 4x - 23$. ידוע ששנייה מקדקודי המלבן הם: $(4,10)$ ו- $(2,2)$.
א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של אלכסוני המלבן.
ב. חשב את שטח המלבן.



10. בריבוע ABCD הקדקוד D נמצא על ציר ה- x. משוואת הצלע AB היא: $y = 2x$. משוואת האלכסון BD היא: $y = -3x + 15$.
א. מצא את משוואת הצלע CD.
ב. חשב את שטח הריבוע.
ג. חשב את הזווית החדה שבין הצלע CD לבין ציר ה- x.

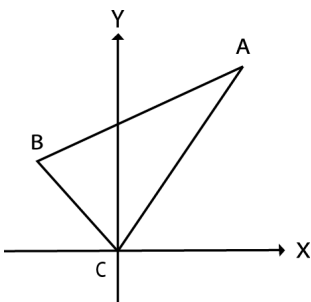
11. במשולש $\triangle ABC$ נתונים שיעורי הקדקודים $A(-2,7)$ ו- $B(-3,4)$. נתון: $\angle ABC = 90^\circ$.
א. מצא את שיעורי הקדקוד C הנמצא על ציר ה- y.
ב. קבע איזו מצלעות המשולש היא הארוכה ביותר וחשב את אורכה.
ג. חשב את שטח המשולש.

12. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ הקדקוד $A(12,6)$ אינו על היתר. הקדקודים B ו-C נמצאים בהתאמה על ציר ה-y ועל ציר ה-x כך ששיעור ה-x של הנקודה C גדול פי שבעה משיעור ה-y של הנקודה B.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
 - חשב את שטח המשולש.
 - מצא את משוואת קטע האמצעים המקביל לניצב AB.

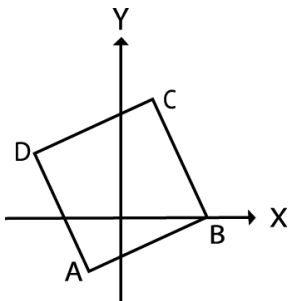
13. במלבן ABCD הקדקוד D נמצא על ציר ה-x. משוואות האלכסונים AC ו-BD הן בהתאמה:

$$y = 3 \quad \text{ו} \quad y = \frac{3}{4}x - 1.5$$

- מצא את שיעורי הקדקוד D.
- נתון: שיעור ה-x של הקדקוד A נמוך משיעור ה-x של הקדקוד C.
- מצא את שיעורי הקדקודים A, B ו-C.
- שטח המלבן ABCD.



14. במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB=AC$), הקדקוד C נמצא בראשית הצירים. שיפוע הצלע AC הוא 2. שיעור ה-y של הקדקוד A גדול ב-4 יח' משיעור ה-x שלו.
- מצא את שיעורי הקדקוד A.
 - שיפוע הגובה היוצא מהנקודה A הוא 1. חשב את שטח המשולש.
 - חשב את הזווית החדה שבין המשך הצלע AB לבין ציר ה-x.



15. במעוין ABCD נתונים הקדקודים $B(4,0)$ ו- $D(-4,4)$. אורך האלכסון AC הוא $4\sqrt{5}$ יח'.

- מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C.
- הוכח שהמעוין ABCD הוא ריבוע וחשב את שטחו.

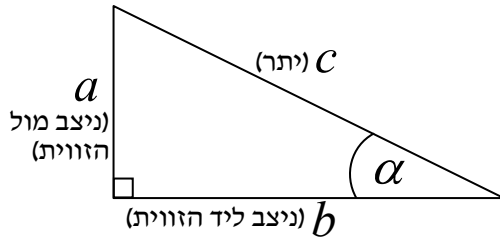
- פתרונות:** 1) א. $(3,2.5)$. ב. $C(5,3)$. ג. 16.32 יח' אורך. 2) א. $C(-4,4)$, $E(-2,2)$. ב. 24 יח"ר.
- 3) א. $B(2,2)$. ב. $y = -x + 6$. ג. $A(0,6)$, $C(6,0)$. ד. 12 יח"ר. ה. $8\sqrt{5} = 17.89$ יח' אורך.
- 4) א. $D(-4,3)$, $E(-5,4)$. ב. $C(-8,1)$. ג. 12 יח"ר.
- 5) א. $A(0,4)$, $B(4,6)$, $C(2,0)$, $D(-2,-2)$. ב. 20 יח"ר. ג. $y = 3x - 1$.
- 6) א. $y = -x + 14$. ב. $C(10,4)$. ג. 30 יח"ר. 7) א. $y = -2.5x + 19$. ב. 14 יח"ר.
- 8) א. $\sqrt{20} = 4.47$ יח' אורך. ב. 40 יח"ר. 9) א. $(5,5.5)$. ב. 34 יח"ר.
- 10) א. $y = 2x - 10$. ב. 20 יח"ר. ג. 63.43° . 11) א. $C(0,3)$. ב. $\sqrt{20} = 4.47$ יח' AC. ג. 5 יח"ר.
- 12) א. $B(0,2)$, $C(14,0)$. ב. 40 יח"ר. ג. $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.
- 13) א. $D(2,0)$. ב. $A(1,3)$, $B(10,6)$, $C(11,3)$. ג. 30 יח"ר.
- 14) א. $A(4,8)$. ב. 24 יח"ר. ג. 26.565° . 15) א. $A(-2,-2)$, $C(2,6)$. ב. 40 יח"ר.

נושא 5 - טריגונומטריה

פונקציות טריגונומטריות מאפשרות לנו למצוא קשר בין יחסי צלעות המשולש לבין זוויותיו.

טריגונומטריה במשולש ישר זווית

במשולש ישר זווית נשתמש ביחסים הבאים:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

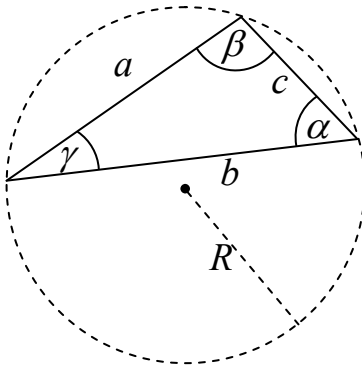
$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{b}{a}$$

חשוב:

1. בתרגילים במשולש ישר זווית לרוב נקבל שני נתונים (זוויות או צלעות), וכדי למצוא את הנתון השלישי (זווית/צלע), נשתמש בפונקציה המתאימה מבין הארבע בכדי להגיע לפתרון.
2. בכל שימוש, חובה לציין באיזה משולש אנו מבצעים את החישובים.
3. מותר ואף רצוי להשתמש במשפט פיתגורס בכל עת.

משפטי עזר בגיאומטריה שיסייעו לנו בתרגילים בהם הצורה מתפרקת למשולשים ישרי זווית (רשימה חלקית):

1. במלבן ובריבוע - האלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה.
2. במקבילית ובמעוין - האלכסונים חוצים זה את זה.
3. במעוין ובריבוע - האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים את הזוויות.
4. במשולש שווה שוקיים, הגובה לבסיס הוא גם חוצה זווית הראש ותיכון.
5. האלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה.
6. בשאלות עם טרפז, לרוב נצטרך להוריד גובה כבניית עזר, מקודקודי הבסיס הקטן.
7. בשאלות עם טרפז שווה שוקיים, נוריד שני גבהים וכך נקבל מלבן ושני משולשים חופפים.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

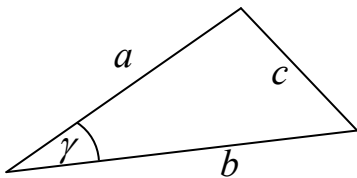
משפט הסינוסים

משפט הסינוסים מתקיים בכל משולש ומשמעותו היא: היחסים בין הצלעות לבין סינוסי הזוויות שמולן שווים זה לזה. רק לתלמידים שלמדו את משפט הסינוסים במעגל: שלושת היחסים הללו שווים גם לקוטר המעגל החוסם את המשולש (2R). (אין למעגל התייחסות בתרגילים לעבודת הקיץ).

בכל שימוש במשפט, חובה לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים.

במשפט הסינוסים ניתן להשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שמול אחת מהן (ז.צ.צ) או כאשר ידועות שתי זוויות ואורך של צלע שמול אחת מהן (צ.ז.ז).

אולם, כאשר ידועים לנו אורכי שלוש צלעות (צ.צ.צ) או אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ) לא ניתן להשתמש במשפט הסינוסים ובמקום זאת נשתמש במשפט הקוסינוסים המופיע בהמשך העמוד.



משפט הקוסינוסים

משפט הקוסינוסים מתקיים בכל משולש וניתן להציגו בשני אופנים:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

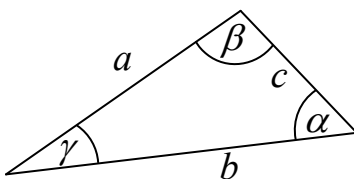
ולאחר בידוד $\cos \gamma$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שלוש הצלעות (צ.צ.צ) ואנו רוצים למצוא את זווית המשולש

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ) ואנו רוצים למצוא את הצלע השלישית

בכל שימוש במשפט, עלינו לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים. כשנדרש לחשב זוויות, לעיתים נקבל שתי תשובות וכמובן נפסול את הזווית שאינה אפשרית בתוך משולש.



חישוב שטח משולש

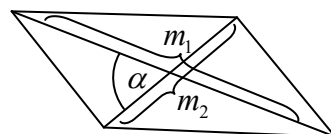
$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

ניתן לחשב את שטחו של כל משולש באמצעות הנוסחה: נשתמש בנוסחה זו כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ).

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

אם ניעזר במשפט הסינוסים נוכל לחלץ מתוך הנוסחה הרגילה, נוסחה נוספת:

נשתמש בנוסחה זו כאשר אנו יודעים אורך של צלע אחת ואת כל הזוויות.



חישוב שטח מרובע על פי אלכסוניו

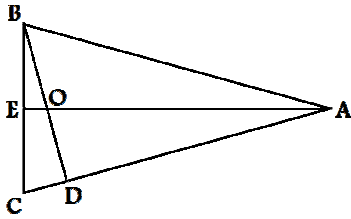
נסמן את אורכי האלכסונים באמצעות m_1 ו- m_2 .

$$S = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

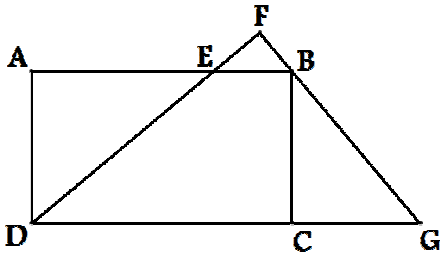
ניתן לחשב את שטחו של כל מרובע באמצעות אורכי אלכסוניו וסינוס הזווית ביניהם:

שימו לב שאין חשיבות באיזו מארבע הזוויות שבין האלכסונים נבחר (נקבל את אותו השטח).

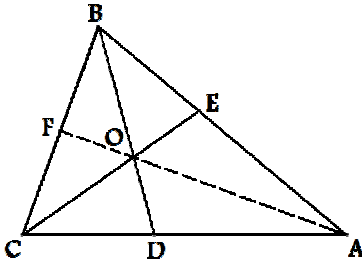
תרגילים - טריגונומטריה במצולעים (ללא מעגל)



1. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ששטחו 28 סמ"ר, נתון: $AB = AC = 10$ סמ"מ. הישר AE הוא חוצה הזווית החדה $\angle BAC$. הישר BD הוא הגובה לשוק AC. חשב את שטח המשולש $\triangle ADO$.
ב. $\triangle ABO$.

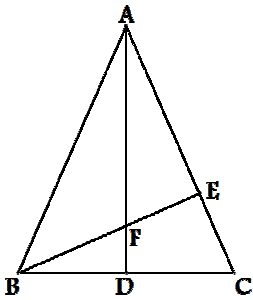


2. נתונים המשולש ישר הזווית $\triangle DFG$ ($\angle DFG = 90^\circ$) והמלבן ABCD. הקודקוד B נמצא על הצלע FG. הצלע DF חותכת את המלבן בנקודה E. שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא 21 סמ"ר. נתון: $\angle ADE = 50^\circ$, $CG = 5$ סמ"מ. חשב את אורך הקטע AE.
ב. נתון: שטח המשולש $\triangle BEF$ הוא 5 סמ"ר. חשב את היקף המשולש $\triangle BEF$.



3. הישרים BD ו-CE חוצי זווית הבסיס במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$. המשכו של הישר AO חותך את הבסיס BC בנקודה F. נתון: $BC = 2k$. הקטע CO אורך פי 1.3 מהקטע CF. חשב באמצעות k את שטח המשולש $\triangle BEO$.
ב. נתון ששטח המשולש $\triangle BEO$ הוא 56 סמ"ר. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.

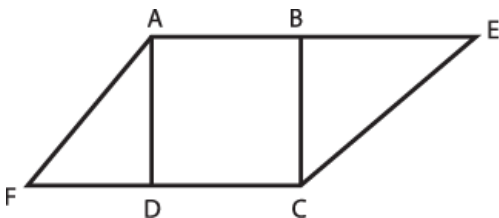
4. הישרים AD ו-BE הם גבהים במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$). נסמן: $\angle ACB = \alpha$, $AC = AB = a$.



- א. הבע באמצעות α ו-a את היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}}$.

- ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}}$ בהינתן ש: $\alpha = 45^\circ$.

- ג. ללא קשר לסעיף ב', נתון: $S_{\triangle BCE} = 3 \cdot S_{\triangle ABD}$. חשב את הזווית α .



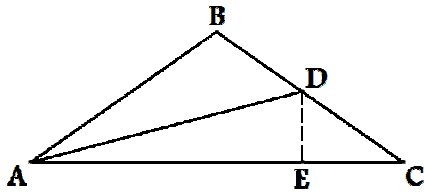
5. נתון הריבוע ABCD שאורך צלעו m. ממשיכים את הצלעות AB ו-CD עד לנקודות E ו-F בהתאמה, כך שמתקיים: $\angle AFC = \angle BCE = \beta$.

- א. הוכח: שטח המרובע AECF הוא: $\frac{m^2 \cdot (1 + \tan \beta)^2}{2 \tan \beta}$.

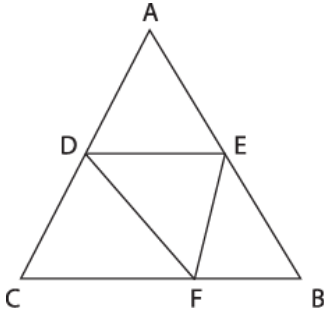
- ב. נתון: שטח המרובע AECF הוא $2m^2$. חשב את β .

- ג. הבע באמצעות m את היקף המרובע AECF.

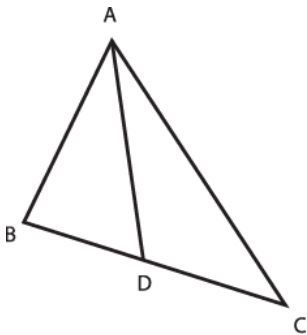
- ד. נתון שהיקף המרובע 29 סמ"מ. מצאו את ערכו של הפרמטר m.



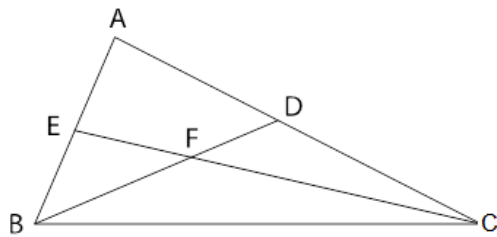
6. נתון המשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($BC=AB$) ששטחו 45 סמ"ר. נתון: $\angle ABC = 110^\circ$. הישר AD חוצה את הזווית $\angle BAC$. מהנקודה D יוצא ישר המאונך לבסיס AC וחותך אותו בנקודה E . חשב את:
- שטח המשולש $\triangle AED$.
 - היקף המשולש $\triangle AED$.
 - היקף המשולש $\triangle ABD$.



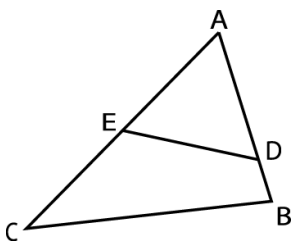
7. במשולש $\triangle ABC$ שווה הצלעות שהיקפו 36 ס"מ נתון: $CF=2BF$. הנקודות E ו- D הן אמצעי הצלעות AB ו- AC בהתאמה. חשב את:
- זווית המשולש $\triangle DEF$.
 - שטח המשולש $\triangle DEF$.



8. במשולש $\triangle ABC$ הישר AD חוצה את הזווית $\angle BAC$. נתון: $BD=6$ ס"מ, $CD=9$ ס"מ, $AB=12$ ס"מ, $AC=18$ ס"מ. חשב את:
- אורך חוצה הזווית AD .
 - שטח המשולש $\triangle ACD$.

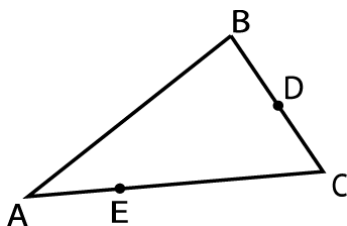


9. במשולש $\triangle ABC$ אורכי התיכונים BD ו- CE הם בהתאמה $3a$ ו- $4.5a$. נתון: $\angle DFC = 29^\circ$. הזווית $\angle BDC$ ו- $\angle BEC$ קהות.
- הבע באמצעות a את היקף המשולש $\triangle ABC$.
 - הבע באמצעות a את אורך התיכון השלישי.
 - נתון: שטח המשולש $\triangle ABF$ הוא 20 סמ"ר. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.

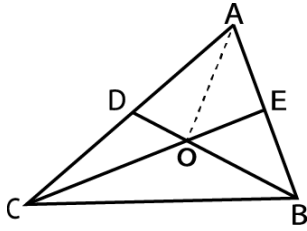


10. הנקודות D ו- E נמצאות על צלעות במשולש $\triangle ABC$ כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $AD=3BD$ ו- $CE=AE$.

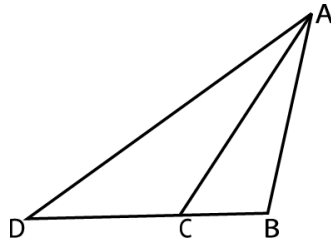
- חשב את היחס בין שטחי המשולשים $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$.
- נתון: $AD=AE$. נסמן: $\angle BAC = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס: $\left(\frac{BC}{DE}\right)^2$.
- נתון: $BC=2DE$. חשב את α .



11. במשולש $\triangle ABC$ נסמן: $BC=2m$, $AC=2BC$, $\angle ACB = 60^\circ$.
- חשב את הזווית $\angle BAC$.
 - הנקודה D היא אמצע BC . הנקודה E נמצאת על AC כך ש: $CE=3AE$. נתון: $DE = \sqrt{7}$ ס"מ. מצא את ערכו של הפרמטר m .
 - חשב את שטח המרובע $ABDE$.



12. במשולש $\triangle ABC$ התיכונים BD ו-CE נחתכים בנקודה O.
 נתון: $DO = 2$ ס"מ, $EO = 3$ ס"מ, $\angle EOB = 50^\circ$.
 א. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.
 ב. חשב את אורך הקטע AO.
 ג. חשב את שטח המשולש $\triangle ACO$.



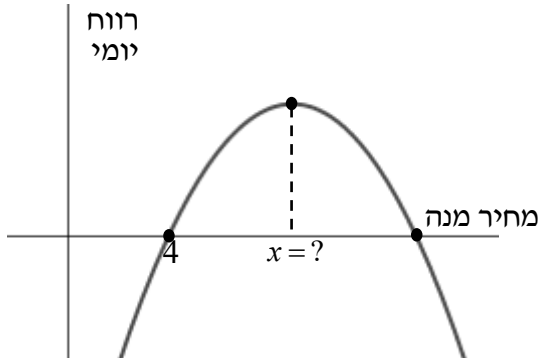
13. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה C נמצאת על BD כך שמתקיים: $CD = 2BC$.
 נתון: $AC = BD$. נסמן: $\angle ACB = \beta$.
 א. הבע באמצעות β את היחס: $\frac{AD}{AB}$.
 ב. נתון: $AD = 2AB$. מצא את β .
 ג. שטח המשולש $\triangle ACD$ הוא 20 סמ"ר. חשב את אורך AC.

פתרונות:

- (1) א. 10.51 סמ"ר. ב. 12.65 סמ"ר.
 (2) א. 7.06 ס"מ. ב. 10.85 ס"מ.
 (3) א. $0.607k^2$. ב. 123.86 ס"מ.
 (4) א. $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}} = 4\cos^2 \alpha$. ב. $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}} = 2$. ג. $\alpha = 30^\circ$.
 (5) א. $\beta = 45^\circ$. ב. $6.82m$. ג. 4.25 ס"מ.
 (6) א. 19.23 סמ"ר. ב. 26.11 ס"מ. ג. 25.06 ס"מ.
 (7) א. $79.1^\circ, 54.79^\circ, 46.1^\circ$. ב. 15.58 סמ"ר.
 (8) א. 12.728 ס"מ. ב. 53.577 סמ"ר.
 (9) א. 11.2a. ב. 2.37a. ג. 60.17 סמ"ר.
 (10) א. 0.375. ב. $\frac{26-24\cos\alpha}{9-9\cos\alpha}$. ג. 33.557° .
 (11) א. 30° . ב. $m = 1$. ג. 2.165 סמ"ר.
 (12) א. 25.2 ס"מ. ב. 4.59 ס"מ. ג. 9.17 סמ"ר.
 (13) א. $\sqrt{\frac{13+12\cos\beta}{10-6\cos\beta}}$. ב. 41.41° . ג. 9.52 ס"מ.

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון

בעיות קיצון הן בעיות בהן עלינו למצוא עבור איזה ערך של x מתקבל גודל מקסימלי או מינימלי כלשהו (שטח, אורך, נפח וכדומה).



לדוגמה, אורך רוצה לפתוח דוכן פלאפל ומעוניין להשיג **רווח מקסימלי**. הכנת מנת פלאפל עולה לו 4 ₪. במידה וימכור כל מנה במחיר של 50 ₪ הרווח שלו על כל מנה יהיה רב, אך מעטים הלקוחות שיגיעו לקנות פלאפל במחיר כזה. במידה וימכור כל מנה ב-3 ₪ יגיעו לחנותו המוני לקוחות, אך הוא יפסיד כסף על כל מנה שימכור. למעשה, ככל שמחיר הפלאפל **עולה**, כמות הלקוחות **פוחתת**. אורן מעוניין למצוא את "המחיר המנצח" שעבורו יהיה הרווח שלו מקסימלי. כלומר, שהשילוב של כמות הלקוחות ושל המחיר למנה, יעניק לו את ה**רווח המקסימלי**. לשם כך, אורן מסמן את מחיר מנת פלאפל ב- x , ומרכיב "פונקציית מטרה" שהיא **רווח יומי ממכירות**. פונקציה זו מתארת את השינוי ברווח היומי שלו כפונקציה של מחיר המנה (x). לפונקציית המטרה (בשרטוט משמאל) יש נקודת **מקסימום**, ולכן אם נגזור אותה ונשווה את הנגזרת ל-0, נמצא את ערכו של x עבורו ה**רווח היומי שלו יהיה מקסימלי**.

בעיות קיצון יכולות להופיע בנושאים שונים: בגיאומטריה, באינטגרלים, בבעיות מילוליות ובגיאומטריה אנליטית, אך את כולן נפתור באמצעות **ארבעה שלבים קבועים**:

1. הרכבת "פונקציית המטרה" ו**כתיבתה תוך שימוש בנעלם הרצוי בלבד**.
2. **מציאת הנקודות החשודות כנקודות קיצון**, על ידי גזירת פונקציית המטרה, והשוואת הנגזרת ל-0.
3. **קביעת סוג הנקודות** (מינימום/מקסימום), באמצעות טבלת עליה וירידה או באמצעות הנגזרת השנייה.
4. **בדיקה מחדש: "מה ביקשו בשאלה?"**, ומציאת התשובה בהתאם לנקודת הקיצון שמצאנו.

נראה מספר דוגמאות של פתרון בעיות קיצון מסוגים שונים, באמצעות ארבעת השלבים:

דוגמא:

סכומם של שני מספרים הוא 20. מצא את שני המספרים, אם נתון שסכום ריבועיהם מינימלי.

פתרון:

1. נסמן את אחד המספרים ב- x . מכיוון שסכום שני המספרים הוא 20, נסמן את המספר השני: $20 - x$. כעת נרכיב פונקציית מטרה המתארת את סכום ריבועיהם של שני המספרים:

$$f(x) = x^2 + (20 - x)^2$$

2. נגזור את פונקציית המטרה, נשווה את הנגזרת ל-0 ונמצא את הנקודות החשודות כקיצון:

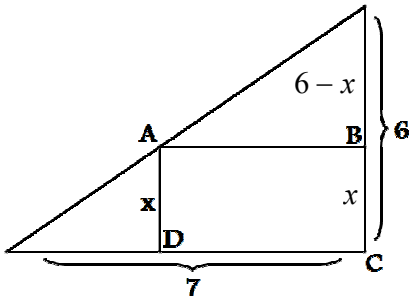
$$f'(x) = 2x + 2(-1) \cdot (20 - x) \rightarrow 4x - 40 = 0 \rightarrow \boxed{x = 10}$$

3. ניגזר בנגזרת השנייה, ונראה כי: $f''(10) = 4 > 0$. הנגזרת השנייה חיובית, ומכאן שהנקודה $x = 10$ היא אכן נקודת המינימום.

4. נתבקשנו למצוא את שני המספרים. המספר הראשון הוא x ולכן ערכו 10. המספר השני הוא $20 - x$, ולכן גם ערכו הוא 10. גילינו כי מבין כל המספרים האפשריים שסכומם הוא 20, סכום ריבועיהם של 10 ו-10 הוא המינימלי ביותר.

דוגמא:

- א. היעזר בנתונים שבשרטוט, ומצא את אורך הקטע AD עבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.
 ב. מצא את שטח המלבן המקסימלי.



פתרון:

1. נסמן את AD באמצעות המשתנה x. בכדי שנוכל להרכיב פונקציית מטרה המתארת את שטח המלבן, עלינו להביע תחילה באמצעות x גם את אורך הצלע AB.
 מכיוון ש: $AB \parallel CD$ ו: $AD = BC = x$ נוכל להיעזר במשפט תאלס:

$$\frac{AB}{7} = \frac{6-x}{6} \rightarrow AB = 7 - \frac{7x}{6}$$

$$f(x) = x \left(7 - \frac{7x}{6} \right) \rightarrow f(x) = 7x - \frac{7x^2}{6}$$

כעת נרכיב את פונקציית המטרה המתארת את שטח המלבן:

2. נגזור את פונקציית המטרה, נשווה הנגזרת ל-0 ונמצא את הנקודות החשודות כקיצון:

$$f'(x) = 7 - \frac{14x}{6} \rightarrow 7 - \frac{14x}{6} = 0 \rightarrow 14x = 42 \rightarrow x = 3$$

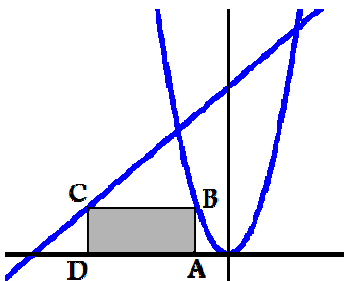
3. ניעזר בנגזרת השנייה ונראה כי: $f''(3) = -\frac{14}{6} < 0$. הנגזרת השנייה שלילית, ומכאן שהנקודה $x = 3$ היא אכן נקודת המקסימום. לכן נאמר שאורך AD עבורו שטח המלבן מקסימלי, הוא 3 ס"מ.

4. מצאנו כי שטח המלבן מקסימלי כאשר 3 ס"מ $AD =$. בכדי למצוא את שטח המלבן המקסימלי, נציב $x = 3$

$$f(3) = 7 \cdot 3 - \frac{7 \cdot 3^2}{6} = 10.5 \text{ סמ"ר}$$

בפונקציית המטרה המתארת את שטח המלבן:

כלומר, שטחו המקסימלי של המלבן הוא 10.5 סמ"ר.



דוגמא: המלבן ABCD כלוא בין ציר x לבין הגרפים של הפרבולה $y = x^2$ והישר $y = x + 11$. מצא את שיעור ה-x של הנקודה A שעבורה שטח המלבן יהיה מינימלי.

פתרון: בבעיות קיצון בגרפים מומלץ לסמן את שיעורי הנקודות באמצעות t, כדי לא להתבלבל עם ה-x הכללי המופיע במשוואות הנתונות. עם זאת, נתייחס ל-t כמו ל-x, מכיוון ש-t הוא משתנה, ולא פרמטר.

פונקציית המטרה צריכה לתאר את השטח, ולכן עלינו להביע תחילה את אורך הצלעות AB ו-BC באמצעות משתנה יחיד. נשאלנו על שיעור ה-x של הנקודה A ולכן נסמן אותו ב-t. מכאן ששיעורי הנקודה A הם: $A(t, 0)$. הקטע AB מקביל לציר ה-y ולכן שיעור ה-x של הנקודה B הוא גם t. הנקודה B נמצאת על הפרבולה $y = x^2$ ומכאן ששיעורי הנקודה B הם: $B(t, t^2)$. מכאן שאורך הצלע AB הוא: $AB = y_B - y_A = t^2 - 0 \rightarrow AB = t^2$. כעת נבטא באמצעות t את שיעורי הנקודה C. הקטע BC מקביל לציר ה-x, ולכן לנקודות B ו-C שיעור y זהה: t^2 . מכיוון שהנקודה C נמצאת על הישר $y = x + 11$, נציב $y_C = t^2$ במשוואת הישר ונמצא את שיעור ה-x של הנקודה C: $t^2 = x_C + 11 \rightarrow x_C = t^2 - 11$

קיבלנו את שיעורי הנקודה C: $C(t^2 - 11, t^2)$ ואורכו של הקטע BC: $BC = x_B - x_C = t - (t^2 - 11) = -t^2 + t + 11$

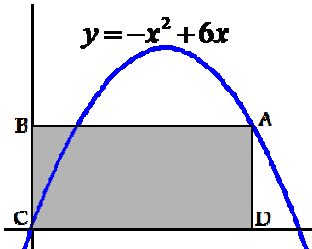
פונקציית המטרה המתארת את שטח המלבן היא:

מכאן נמשיך בשלבי הפתרון כרגיל, ונמצא כי שיעור ה-x של הנקודה A עבורו שטח המלבן מינימלי הוא: $x_A = -2$.

תרגילים - בעיות ערך קיצון

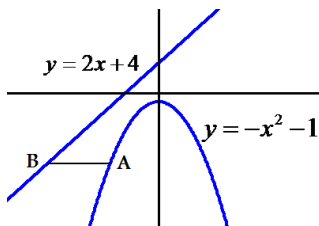
בעיות הכוללות גרפים

פונקציות פולינום



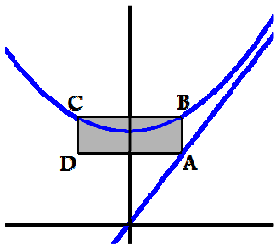
1. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x$ כמתואר בשרטוט. מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שמתקבל המלבן ABCD כמתואר בשרטוט. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t.

- א. הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.
 ב. מצא את ערך t עבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.
 ג. חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.

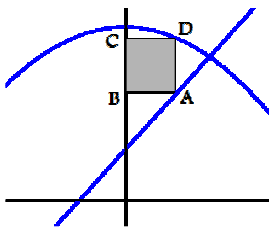


2. בשרטוט מופיעים הגרפים של הישר $y = 2x + 4$ והפרבולה $f(x) = -x^2 - 1$. הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הפרבולה ועל הישר כך שהישר AB מקביל לציר ה-x. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t.

- א. הבע באמצעות t את שיעור ה-x של הנקודה B.
 ב. חשב את האורך המינימלי של הקטע AB.

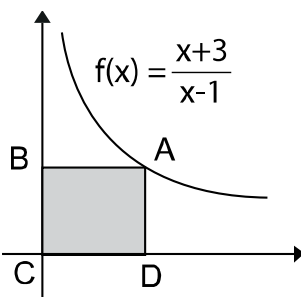


3. הנקודה A נמצאת על הישר $y = 27x$ כמתואר בשרטוט. הנקודות B ו-C נמצאות על הפרבולה $f(x) = x^2 + 216$ כך שמתקבל המלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירים כמתואר בשרטוט. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t. מצא את ערכו של t שעבורו שטח המלבן ABCD הוא:
- א. מקסימלי.
 ב. מינימלי.

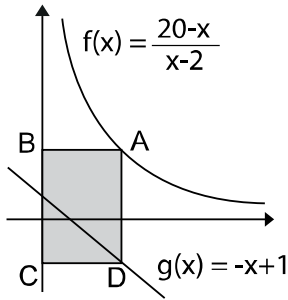


4. הנקודה A נמצאת על הישר $y = 6x + 6$, והנקודה D נמצאת על הפרבולה $f(x) = -x^2 + 21$ כמתואר בשרטוט. הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה-y כך שמתקבל המלבן ABCD.
- א. חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.
 ב. כאשר שטח המלבן ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.

פונקציות מנה

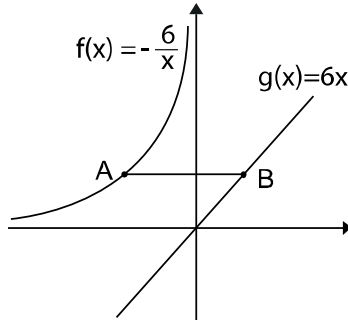


5. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שמתקבל המלבן ABCD כמתואר בשרטוט. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t.
- א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.
 ב. מצא את t שעבורו היקף המלבן מינימלי.
 ג. חשב את ההיקף המינימלי של המלבן ABCD.



6. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{20-x}{x-2}$ והישר $g(x) = -x+1$

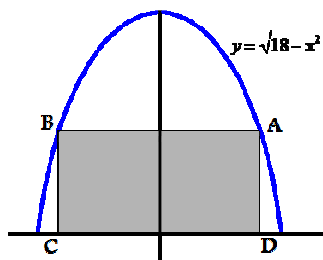
הנקודות A ו-D נמצאות בהתאמה על גרף הפונקציה $f(x)$ ועל הישר $g(x)$ כך שהישר AD מקביל לציר ה-y. הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה-x כך שמתקבל המלבן ABCD. חשב את ההיקף המינימלי של המלבן ABCD.



7. הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציה:

$f(x) = -\frac{6}{x}$ ושל הישר $g(x) = 6x$ כמתואר בשרטוט. הישר AB מקביל לציר ה-x. חשב את אורכו המינימלי של הישר AB.

פונקציות שורש



8. הנקודות A ו-B נמצאות ברביעים הראשון והשני בהתאמה, על גרף

הפונקציה $f(x) = \sqrt{18-x^2}$ כמתואר בשרטוט. AB מקביל לציר ה-x.

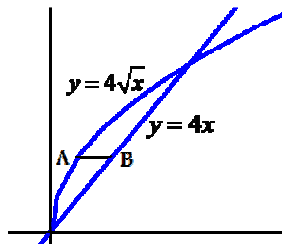
א. הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא זוגית. נמק.

ב. מהנקודות A ו-B מורידים אנכים לציר ה-x כך שמתקבל המלבן ABCD כמתואר בשרטוט. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A

באמצעות t. הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.

ג. מצא את ערך t עבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

ד. חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.



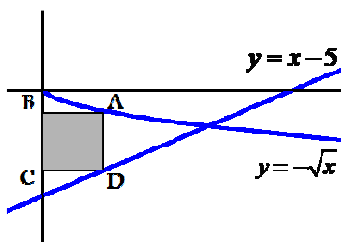
9. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ והישר $y = 4x$.

הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על גרף הפונקציה $f(x)$ ועל הישר כך

שהישר AB מקביל לציר ה-x. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-x של הנקודה B.

ב. חשב את האורך המקסימלי של הקטע AB.



10. הנקודות A ו-D נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציה

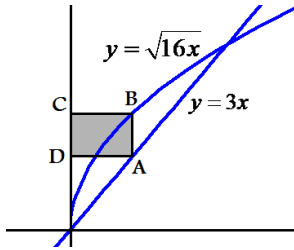
$f(x) = -\sqrt{x}$ ושל הישר $y = x-5$ כמתואר בשרטוט. הנקודות B ו-C

נמצאות על ציר ה-y כך שמתקבל המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה-x

של הנקודה A באמצעות t. מצא את ערכו של t שעבורו שטח המלבן

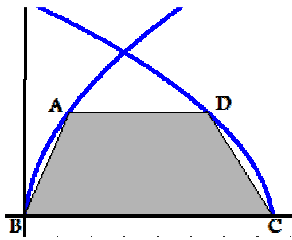
ABCD הוא מקסימלי.

(בתשובתך השאר שתי ספרות מימין לנקודה העשרונית).



11. הנקודה A נמצאת על הישר $y = 3x$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{16x}$ כמתואר בשרטוט. הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה-y כך שמתקבל המלבן ABCD.

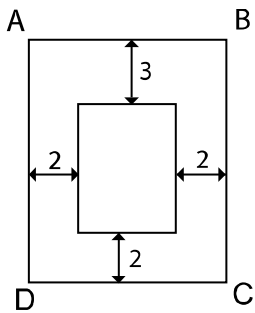
- א. חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.
ב. כאשר שטח המלבן ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.



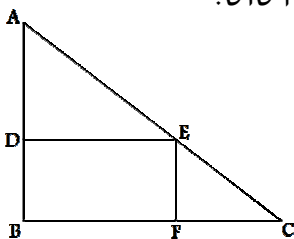
12. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{3x}$ ו- $g(x) = \sqrt{30-2x}$. הנקודות החותכים את ציר ה-x בנקודות B ו-C בהתאמה כמתואר בשרטוט. הנקודות A ו-D נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ כמתואר בשרטוט, כך שהישר AD מקביל לציר ה-x. מצא את שיעור ה-x של הנקודה A, שעבורה שטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי.

בעיות גיאומטריות

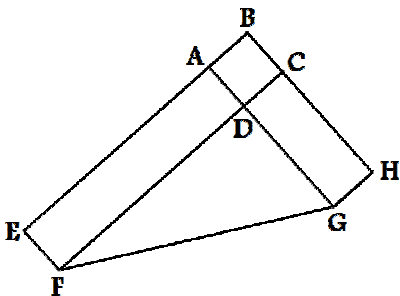
פונקציות פולינום



13. בתוך מלבן ABCD שהיקפו 32 מ', מציירים מלבן פנימי קטן יותר. צלעות המלבנים מקבילות זו לזו כמתואר בשרטוט והמרחקים ביניהן מופיעים בשרטוט. נסמן באמצעות x את הרוחב AB.
א. מצא את x שעבורו שטח המלבן הפנימי יהיה מקסימלי.
ב. כאשר שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי, חשב את היקפו.

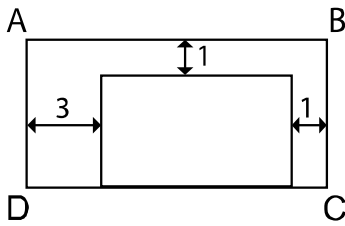


14. במשולש $\triangle ABC$ ישר הזווית ($\angle B = 90^\circ$) חסום המלבן BDEF כמתואר בשרטוט. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ.
א. מצא את האורכים של צלעות המלבן, עבורן יהיה שטח המלבן מקסימלי.
ב. כאשר שטח המלבן מקסימלי, חשב את היחס בין שטחו לבין שטח המשולש $\triangle ADE$.

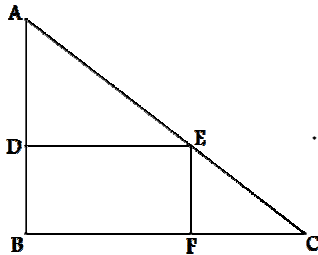


15. על צלעות הריבוע ABCD בנו שני מלבנים. היקף המלבן CDGH הוא 20 ס"מ. נתון: $AE = 5BC$.
א. מצא את אורך צלע הריבוע ABCD שעבורו שטח המשולש $\triangle DFG$ הוא מקסימלי.
ב. חשב את השטח המקסימלי של המשולש $\triangle DFG$.

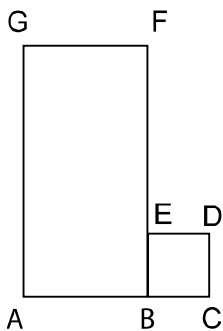
פונקציות מנה



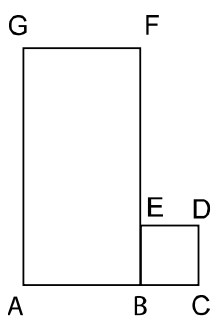
16. בתוך המלבן ABCD חסום מלבן. צלעותיו של המלבן הפנימי מקבילות לצלעות המלבן ABCD. נתונים האורכים שבשרטוט בס"מ. שטחו של המלבן ABCD הוא 100 סמ"ר. מצא את אורכי צלעותיו של המלבן ABCD שעבורן יהיה (אין קשר בין הסעיפים):
- היקף המלבן הפנימי מינימלי.
 - שטח המלבן הפנימי מקסימלי.



17. במשולש $\triangle ABC$ ישר הזווית ($\angle B = 90^\circ$) חסום מלבן BDEF. נתון: $DE = 12$ ס"מ, $EF = 3$ ס"מ. חשב את:
- אורך ניצבי המשולש $\triangle ABC$ עבורם יהיה הסכום $AB + BC$ מינימלי.
 - שטחו של המשולש $\triangle ABC$ כאשר הסכום $AB + BC$ מינימלי.

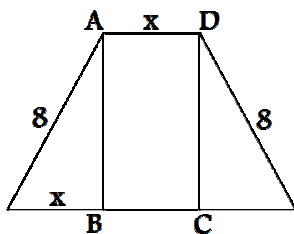


18. בשרטוט מופיעים הריבוע BCDE והמלבן ABFG צמודים זה לזה כך שהנקודות A, B ו-C נמצאות על ישר אחד. נתון: $AB = 3BC$. שטח המלבן 48 סמ"ר.
- חשב את אורך CD, שעבורו ההיקף החיצוני של הצורה כולה הוא מינימלי.
 - חשב את ההיקף המינימלי.
 - כאשר ההיקף החיצוני מינימלי, חשב את שטח הצורה כולה.

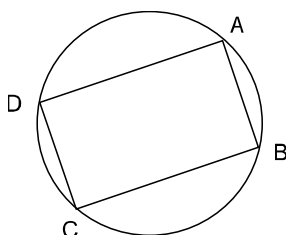


19. בשרטוט מופיעים הריבוע BCDE והמלבן ABFG צמודים זה לזה כך שהנקודות A, B ו-C נמצאות על ישר אחד. שטח הצורה המאוחדת כולה הוא 5 סמ"ר. נתון: $AB = 2BC$.
- חשב את אורך BC, שעבורו ההיקף החיצוני של הצורה כולה הוא מינימלי.
 - חשב את ההיקף המינימלי.

פונקציית שורש

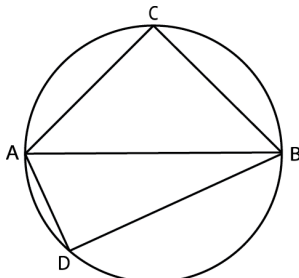


20. על אורכי המלבן ABCD בנו שני משולשים ישרי זווית שאורך היתר שלהם הוא 8 ס"מ, ואורך הניצב הקצר הוא x כמתואר בשרטוט. נתון שרוחב המלבן AD גם הוא באורך x.
- הבע באמצעות x את שטח המלבן ABCD.
 - מצא את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.



21. המלבן ABCD שהיקפו 44 ס"מ חסום בתוך מעגל.
- חשב את אורכי צלעות המלבן ABCD שעבורן יהיה אורך רדיוסו של המעגל מינימלי.
 - כאשר הרדיוס מינימלי, חשב את שטח המלבן.

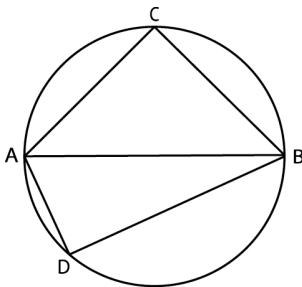
22. במשולש $\triangle ABC$ ישר הזווית נתון אורך היתר: $\sqrt{200}$ ס"מ $AC =$.
 א. חשב את אורכי הניצבים שעבורם היקף המשולש יהיה מקסימלי.
 ב. כאשר היקף המשולש יהיה מקסימלי, חשב את שטחו.



23. הנקודות C ו-D נמצאות על מעגל שקוטרו AB.

נתון: $BC = AC = 4$ ס"מ.

- א. חשב את אורך AD, שעבורו שטח המרובע ABCD מקסימלי.
 ב. כאשר שטח המרובע ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.



24. הנקודות C ו-D נמצאות על מעגל שקוטרו AB.

נתון: $BC = AC = 2$ ס"מ.

- א. חשב את אורך AD, שעבורו היקף המרובע ABCD מקסימלי.
 ב. כאשר היקף המרובע ABCD מקסימלי, חשב את השטח הכולל בין המרובע ABCD, לבין המעגל.

בעיות העוסקות במספרים

פונקציות פולינום

25. ההפרש בין שני מספרים הוא 4.

- א. מצא את המספרים, בהינתן שמכפלתם מינימלית.
 ב. מצא את המכפלה המינימלית.

26. סכומם של שני מספרים הוא 30. מכפילם את ריבועו של המספר הראשון (x) במספר השני. מצא את המספרים שעבורם מכפלה זו:

- א. מקסימלית.
 ב. מינימלית.

27. סכומם של שלושה מספרים הוא 54. המספר השני גדול פי שלושה מהראשון. מצא את המספרים, אם נתון שמכפלתם מקסימלית.

28. סכומם של שלושה מספרים הוא 90. המספר השני גדול פי שניים מהראשון. מצא את המספרים, בהינתן שמכפלתם מקסימלית.

29. (*) סכומם של שלושה מספרים אי-שליליים הוא 42. המספר השני גדול פי שניים מהראשון. מצא את המספרים בהינתן שסכום ריבועיהם:

- א. מינימלי.
 ב. מקסימלי. (נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה של המספרים).

30. סכומם של שלושה מספרים הוא $18a$ ($a > 0$). המספר השני גדול פי שניים מהראשון. מכפלתם של שלושת המספרים היא מקסימלית.

- א. הבע באמצעות a את שלושת המספרים.
 ב. נתון: מכפלתם המקסימלית של שלושת המספרים היא 192. חשב את סכום שלושת המספרים.

פונקציות מנה

31. נתונים שני מספרים חיוביים. המספר השני גדול פי תשעה מהראשון. מצא את :
 א. שני המספרים, אם הסכום של המספר השני וההופכי של המספר הראשון, הוא מינימלי.
 ב. הסכום המינימלי.
32. נתונים שני מספרים חיוביים, x ו- y אשר מקיימים : $x^2 \cdot y = 32$. מצא את :
 א. שני המספרים, אם סכומם מינימלי.
 ב. הסכום המינימלי.
 ג. מכפלת שני המספרים, במקרה שבו סכומם מינימלי.
33. נתונים שלושה מספרים חיוביים. המספר השני הוא ריבועו של המספר הראשון. המספר השלישי קטן ב-3 מהמספר הראשון. מחלקים את המספר השני במספר השלישי. מצא את המספר הראשון, במקרה שבו המנה שחושבה היא מינימלית.
34. נתונים שני מספרים שסכומם 18. לראשון מביניהם מוצאים את המספר ההופכי ומכפילים אותו פי שניים. לשני מביניהם מוצאים את המספר ההופכי ומכפילים אותו פי שמונה. את שתי התוצאות מחברים לסכום אחד.
 א. מצא את שני המספרים המקוריים, בהינתן שהסכום שחושב הוא מינימלי.
 ב. חשב את הסכום המינימלי שחושב.
35. (*) נתונים שלושה מספרים חיוביים. המספר הראשון אינו גדול מ-4. המספר השני שווה לריבועו של הראשון. המספר השלישי גדול ב-1 מהשני. מחלקים את המספר השני במספר השלישי.
 א. מצא את שלושת המספרים, אם המנה שחושבה היא מקסימלית.
 (נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה).
 ב. חשב את המנה המקסימלית.

פונקציות שורש

36. נתון מספר חיובי. מוציאים ממנו שורש, ומחסרים מהתוצאה את המספר עצמו. מצא את :
 א. המספר, אם נתון שההפרש שחושב הוא מקסימלי.
 ב. ההפרש המקסימלי.
37. נתונים שני מספרים חיוביים. המספר השני הוא השורש הריבועי של הראשון. מכפילים את המספר השני פי שניים ומחסרים ממנו את המספר הראשון. חשב את התוצאה המקסימלית של החישוב.
38. נתונים שני מספרים חיוביים שסכומם 3. מכפילים את ריבועו של המספר הראשון בשורש הריבועי של המספר השני.
 א. מצא את שני המספרים שעבורם מכפלה זו היא מקסימלית.
 ב. כאשר מכפלת המספרים היא מקסימלית, חשב את ההפרש ביניהם.
39. נתונים שני מספרים חיוביים, כך שסכום ריבועיהם גדול פי עשרה מהמספר הראשון מביניהם. מצא את הערך המקסימלי האפשרי של המספר השני.
40. נתון מספר. מוצאים את המספר ההופכי לו ומכפילים אותו פי ארבעה. לתוצאה מוסיפים את השורש הריבועי של המספר המקורי.
 א. מצא את המספר המקורי, בהינתן שהסכום שחושב הוא מינימלי.
 ב. חשב את הסכום המינימלי.

41. (*) נתונים שני מספרים. המספר הראשון אינו קטן מ-18. המספר השני גדול פי שמונה מהראשון. מחסרים מהמספר הראשון את השורש הריבועי של המספר השני. מצא את:
- א. שני המספרים, שעבורם תוצאת החישוב תהיה מינימלית. (מציאת נק' קיצון בקצה התחום).
- ב. את התוצאה המינימלית של החישוב.
42. נתונים שלושה מספרים חיוביים. נסמן באמצעות x את המספר הראשון מביניהם. סכום הריבועים של המספרים הראשון והשני הוא 10. המספר השלישי גדול פי שניים מהראשון.
- א. מצא את שלושת המספרים בהינתן שסכומם מקסימלי.
- ב. כאשר סכום שלושת המספרים מקסימלי, חשב את מכפלתם.
- פתרונות: (1)** א. $S = -t^3 + 6t^2$. ב. 4. ג. 32 יח"ר. (2) א. $x_B = -\frac{t^2 + 5}{2}$. ב. 2 יח' אורך. (3) א. 6. ב. 12.
- (4) א. 8 יח"ר. ב. 18 יח' אורך. (5) א. $P = 2t + \frac{2t + 6}{t - 1}$. ב. 3. ג. 12 יח' אורך. (6) א. 28 יח' אורך.
- (7) 2 יח' אורך. (8) ב. $2t\sqrt{18 - t^2}$. ג. 3. ד. 18 יח"ר. (9) א. $\sqrt{t}$. ב. 0.25. (10) $x_A = 1.56$.
- (11) א. 1 יח"ר. ב. 4 יח' אורך. (12) $x_A = 4$. (13) א. 7.5 ס"מ. ב. 14 ס"מ.
- (14) א. 6 ס"מ, $BD = 8$ ס"מ, $DE = 8$ ס"מ. ב. 2. (15) א. 5 ס"מ. ב. 62.5 סמ"ר. (16) א. 10 ס"מ, 10 ס"מ.
- ב. 5 ס"מ, 20 ס"מ. (17) א. 9 ס"מ, $AB = 18$ ס"מ, $BC = 81$ סמ"ר. (18) א. 2 ס"מ. ב. 32 ס"מ.
- ג. 52 סמ"ר. (19) א. 1 ס"מ. ב. 10 ס"מ. (20) א. $x\sqrt{64 - x^2}$. ב. 32 סמ"ר. (21) א. כל הצלעות: 11 ס"מ.
- ב. 121 סמ"ר. (22) א. 10 ס"מ, 10 ס"מ. ב. 50 סמ"ר. (23) א. 4 ס"מ, $AD = 16$ ס"מ. ב. 16 ס"מ.
- (24) א. 2 ס"מ, $AD = 2.28$ סמ"ר. (25) א. -2, -2. ב. -4. (26) א. 20, 10. ב. 30, 0. (27) א. 9, 27, 18.
- (28) 30, 40, 20. (29) א. 15, 18, 9. ב. 0, 0, 42. (30) א. $6a, 8a, 4a$. ב. 18. (31) א. $\frac{1}{3}, 3$. ב. 6.
- (32) א. $x = 4, y = 2$. ב. 6. ג. 8. (33) א. 6. (34) א. הראשון: 6, השני: 12. ב. 1. (35) א. 17, 16, 4. ב. $\frac{16}{17}$.
- (36) א. 0.25. ב. 0.25. (37) א. 1. (38) א. 0.6, 2.4. ב. 1.8. (39) א. 5. (40) א. 4. ב. 3. (41) א. 144, 18. ב. 6.
- (42) א. הראשון: 3, השני: 1, השלישי: 6. ב. 18.

תרגילים - בעיות תנועה

שימו לב! בכל התרגילים מהירות הנסיעה קבועה, אלא אם מצוין אחרת.

- מכונית מהירה וקטנוע איטי יצאו בו זמנית מתל אביב לקיבוץ בצפון. מהירות הקטנוע נמוכה ב-25% ממהירות המכונית. כעבור שעתיים היה המרחק ביניהם 40 ק"מ.
א. חשב את מהירות המכונית והקטנוע.
ב. חשב מה יהיה המרחק ביניהם כעבור חמש שעות מתחילת הנסיעה.
- רוכב יצא מביתו לכיוון בית הספר במהירות 15 קמ"ש. כעבור שעתיים יצא אביו בקטנוע שמהירותו גבוהה פי שלושה ממהירות הרוכב כדי להביא לו את האוכל ששכח בבית.
א. נתון שהשניים הגיעו יחד לבית הספר. חשב את המרחק בין בית הספר לביתם של הרוכב ואביו.
ב. חשב את משך נסיעתו של האב מרגע יציאתו ועד הגעתו לבית הספר.
- שתי רכבות יצאו בו זמנית מבאר שבע לעכו, מרחק של 250 ק"מ. מהירות הרכבת השנייה גבוהה ב-25% ממהירות הרכבת הראשונה. הרכבת הראשונה יצאה לדרכה בשעה 6:00 והשנייה בשעה 6:30.
שתי הרכבות הגיעו לעכו בו זמנית. חשב:
א. את מהירויות הרכבות.
ב. כמה זמן נסעה הרכבת השנייה מבאר שבע לעכו.
- שתי רכבות יצאו בו זמנית, האחת לקראת השנייה, מהנקודות A ו-B בהתאמה, שהמרחק ביניהן 99 ק"מ. מהירות הרכבת שיצאה מהנקודה A גבוהה ב-10% ממהירות הרכבת השנייה. הרכבת שיצאה מהנקודה A הגיעה לנקודה B בדיוק עשר דקות לפני שהרכבת השנייה הגיעה לנקודה A. חשב את:
א. מהירות הרכבת היוצאת מהעיר A.
ב. משך נסיעתה של הרכבת שיצאה מהעיר A.
- מדי שבוע, נוסע יהודה 160 ק"מ לביתה של נוגה. בדרך כלל הוא נוסע את הדרך כולה במהירות קבועה, אך השבוע נסע את 100 הקילומטרים הראשונים במהירות הגדולה ב-25% ממהירותו הרגילה, ואת שאר הדרך נסע במהירות הקטנה ב-50% ממהירותו הרגילה. כשהגיע, הסתבר כי נסיעתו ארכה חצי שעה יותר מהרגיל. חשב את מהירותו הרגילה של יהודה.
- שני רוכבים יצאו בו זמנית מתל אביב ומירושלים, האחד לקראת השני. מהירות הרוכב שיצא מתל אביב גבוהה ב-40 קמ"ש ממהירות הרוכב שיצא מירושלים. המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק"מ. הרוכב שיצא מירושלים הגיע לתל אביב 90 דקות לאחר שהרוכב מתל אביב הגיע לירושלים. חשב את מהירויות הרוכבים.
- רוכב אופנוע יצא מבית הוריו ונסע במהירות קבועה לאוניברסיטה. כעבור חמש דקות מיציאתו, גילתה אמו כי שכח את המכשיר הסלולארי שלו ויצאה לכיוונו במכונית כדי לתת לו אותו. מהירותה הייתה גבוהה ב-10 קמ"ש ממהירות בנה והיא השיגה אותו במרחק עשרה ק"מ מביתה.
א. חשב את מהירויות נסיעתם של הבן ושל האם.
ב. מיד לאחר פגישתם הסתובבה האם ושבה לביתה. כשהגיעה לביתה, הגיע בנה לאוניברסיטה. חשב את המרחק בין האוניברסיטה לבין בית המשפחה.
- המרחק בין באר שבע לבין תל אביב הוא 120 ק"מ. ברגע בו יצא אריק מבאר שבע לתל אביב, יצא נועם מתל אביב לבאר שבע. מהירותו של אריק היתה גדולה בעשרה קמ"ש ממהירותו של נועם. שניהם עצרו בדרך להתרעננות: אריק למשך עשר דקות ונועם למשך 30 דקות. אריק הגיע לת"א 30 דקות לפני שנועם הגיע לבאר שבע.
א. חשב את המהירויות של שניהם.
ב. למחרת יצאו בו זמנית מאותן נקודות ובאותו כיוון אך לא עצרו להתרעננות. חשב מה היה המרחק ביניהם כעבור 30 דקות של נסיעה.

9. הראל צועד מדי יום למרחק 12 ק"מ במהירות קבועה במסלול קבוע. יום אחד, לאחר שעבר שני שליש מהמסלול, התעכב למשך עשר דקות ולכן נאלץ להגדיל את מהירותו בשני קמ"ש כדי להגיע בזמן.
א. חשב את מהירותו הרגילה של הראל. (המשך התרגיל בעמוד הבא)
ב. למחרת החליט להגדיל את מהירותו הקבועה ב- x אחוזים וקיצר את המסלול בשלושה ק"מ. זמן הליכתו הכולל באותו יום היה שעה. מצא את ערכו של x .

10. המרחק בין קרית אונו לבין תל אביב הוא 30 ק"מ. דפנה ושי יצאו במקביל מקרית אונו ומתל אביב בהתאמה והלכו במהירות קבועה האחד לקראת השניה. הם חלפו זה על פני זה כעבור שתיים. דפנה הגיעה לתל אביב שעה וארבעים דקות אחרי ששי הגיע לקרית אונו. חשב את מהירותה של דפנה.

11. מיקה רוכבת בכל יום במהירות קבועה מביתה למשרד הנמצא במרחק שישה ק"מ מביתה. הבוקר רכבה מיקה שש דקות במהירותה הרגילה. לאחר מכן רכבה במשך 20 דקות נוספות במהירות גבוהה יותר והגיעה למשרד. לו הייתה רוכבת במהירותה הרגילה כל הדרך, היה זמן נסיעתה ארוך בעשר דקות מהזמן שלקח לה הבוקר. חשב את המהירות הרגילה ואת המהירות הגבוהה בה נסעה הבוקר.

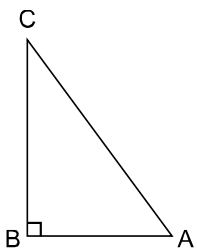
12. ארנב וצב יוצאים יחד מאותו שיח לכיוון נקודה מסוימת על גדת הנהר. מרחק ההליכה הוא חמישה ק"מ. מהירות הארנב גבוהה פי עשרה ממהירות הצב. הארנב הגיע לנהר תשע שעות לפני הצב. חשב:
א. את מהירות הצב ואת מהירות הארנב.
ב. מה היה המרחק בין השניים כאשר הגיע הארנב לנהר.

13. שני רוכבים יוצאים בו זמנית, האחד לכיוון השני, מן הערים A ו-B שהמרחק ביניהן 500 ק"מ. מהירות הרוכב שיצא מהעיר A גבוהה בעשרה קמ"ש ממהירות הרוכב שיצא מהעיר B. לאחר שהרוכב שיצא מהעיר A עבר 300 ק"מ, השניים נפגשו. חשב:
א. את מהירויות הרוכבים.
ב. כמה זמן חלף מרגע הפגישה ועד שהרוכב שיצא מהעיר B הגיע לעיר A.

14. שתי כרכרות יצאו בו זמנית מן הארמון ונסעו לאגם המלכותי - מרחק של 100 ק"מ. מהירותה של כרכרת האבטחה גבוהה ב-60% ממהירותה של כרכרת המלכה. כרכרת האבטחה הגיעה לאגם שעה וחצי לפני כרכרת המלכה:

- א. חשב את המהירות של כל כרכרה.
ב. למחרת יצאו הכרכרות בו זמנית מהארמון לאגם, אך הנמיכו ב-20% את מהירותן ביחס למהירויות אתמול. חשב כעבור כמה זמן היה המרחק בין הכרכרות 24 ק"מ.

15. סמיר וחסן גרים במרחק 72 ק"מ אחד מהשני. הבוקר יצאו, כל אחד מביתו, ורכבו לכיוון ביתו של השני במהירויות קבועות. כעבור שעה וארבעים דקות, טרם נפגשו, היה המרחק ביניהם שני ק"מ. סמיר הגיע ליעדו שעה אחת לפני שחסן הגיע ליעדו. חשב את מהירויות הרכיבה של השניים.



16. הנקודות A, B ו-C יוצרות משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). ב-9:00 יצא הולך רגל מהנקודה B לנקודה A במהירות 2 קמ"ש. ב-11:00 יצא רוכב אופניים מהנקודה B לנקודה C במהירות 8 קמ"ש. כאשר הולך הרגל הגיע לנקודה A, המרחק בין השניים היה 26 ק"מ (באותו רגע הרוכב טרם הגיע ליעדו).
א. חשב באיזו שעה הגיע הולך הרגל לנקודה A.
ב. בשעה 15:30 הגיע הרוכב לנקודה C. חשב את אורך הצלע BC.

- פתרונות:** (1) א. מכונית 80 קמ"ש, קטנוע 60 קמ"ש. ב. 100 ק"מ. (2) א. 45 ק"מ. ב. שעה. (3) א. הראשונה 100 קמ"ש, השנייה 125 קמ"ש. ב. שתיים. (4) א. 54 קמ"ש. ב. שעה וארבעים דקות. (5) 80 קמ"ש. (6) מירושלים: 40 קמ"ש. מתל אביב: 80 קמ"ש. (7) א. הרוכב: 30 קמ"ש, האם: 40 קמ"ש. ב. 17.5 ק"מ. (8) א. נועם: 80 קמ"ש, אריק: 90 קמ"ש. ב. 35 ק"מ. (9) א. 6 קמ"ש. ב. $x = 50$. (10) 6 קמ"ש. (11) 10 קמ"ש ו-15 קמ"ש. (12) א. ארנב: 5 קמ"ש, צב: 0.5 קמ"ש. ב. 4.5 ק"מ. (13) א. מ-A 30 קמ"ש, מ-B 20 קמ"ש. ב. 15 שעות. (14) א. המלכה: 25 קמ"ש, האבטחה: 40 קמ"ש. ב. שתיים. (15) סמיר: 24 קמ"ש, חסן: 18 קמ"ש. (16) א. 14:00. ב. 36 ק"מ.

חקירת פונקציית פולינום

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
2. נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי העליה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא עבור אילו ערכי k חותך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות. נמק.

11. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^4 - 8x^3$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. נקודות הקיצון ואת סוגן (במידה ומצאת נקודת פיתול - ציין אותה).
2. נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי העליה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$. במידה ומצאת נקודת פיתול - התייחס אליה בשרטוט.

ג. מצא עבור אילו ערכי p למשוואה $f(x) = p$ אין פתרונות. נמק.

ד. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = 2 \cdot f(x)$. מצא את נקודות הקיצון של $g(x)$ ואת סוגן.

12. נתונה הפונקציה: $f(x) = 5x^7 - 7x^5$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

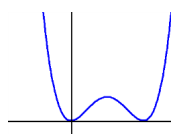
1. נקודות הקיצון ואת סוגן (במידה ומצאת נקודת פיתול - ציין אותה).
2. נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי העליה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$. במידה ומצאת נקודת פיתול - התייחס אליה בשרטוט.

ג. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ד. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = -f(x)$. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן.

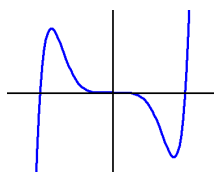
פתרונות:



10. א. 1. $\min(0,0), \max(3,81), \min(6,0)$. 2. $(6,0), (0,0)$.
 3. עולה: $6 < x$ או $0 < x < 3$; יורדת: $3 < x < 6$ או $x < 0$.
 ב. השרטוט משמאל. ג. $k = 81$.



11. א. 1. $\min(2,-16)$. קיימת נקודת פיתול $(0,0)$. 2. $(0,0), (2, \frac{2}{3})$.
 3. עולה: $2 < x$; יורדת: $x < 2$. ב. השרטוט משמאל.
 ג. $p < -16$. ד. $\min(2,-32)$.



12. א. 1. $\max(-1,2), \min(1,-2)$. קיימת נקודת פיתול $(0,0)$.
 2. $(-1.18, 0), (0,0), (1.18, 0)$. 3. עולה: $1 < x$ או $x < -1$; יורדת: $-1 < x < 1$.
 ב. השרטוט משמאל.
 ג. חיוביות: $1.18 < x$ או $-1.18 < x < 0$; שליליות: $0 < x < 1.18$ או $x < -1.18$.
 ד. $\min(-1,-2), \max(1,2)$.

חקירת פונקציית פולינום - כולל פרמטר

1. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 3$ הוא 12.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר a .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. נקודות החיתוך עם הצירים.
 3. תחומי העליה והירידה.
 - ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. מצא כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x) = 4.5$. נמק.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax^4 + (a-9) \cdot x^2 - 9$ בנקודה בה $x = -1$ קטן פי חמישה משיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 3$.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר a .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. נקודות החיתוך עם הצירים.
 3. תחומי העליה והירידה.
 - ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. מצא כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x) = -12$.
 - ה. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
3. הערך המקסימלי של הפונקציה: $f(x) = -x^4 + 4p^3x$ הוא 3.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר החיובי p .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות החיתוך עם הצירים.
 2. תחומי העליה והירידה.
 3. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. נתונות המשוואה הראשונה: $-x^4 + 4x = 24$ והשנייה: $-x^4 + 4x = 1$. קבע לאיזו מהמשוואות יש יותר פתרונות. נמק.
4. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + bx + 16$. נתון: $f(2) = 20$.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר b .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. תחומי העליה והירידה.
 3. נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
 - ג. הוכח: גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(-0.5, 0)$.
 - ד. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
5. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3m^2x$.
 - א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ הבע באמצעות הפרמטר החיובי m , במידת הצורך, את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. תחומי העליה והירידה.
 3. נקודת החיתוך עם הצירים.
 - ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ג. נתון: שיפוע הישר העובר דרך שתי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה הוא -8. מצא את m .

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12px^2 + 36p^2x$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ הבע באמצעות הפרמטר החיובי p , במידת הצורך, את:

1. נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. נקודת החיתוך עם הצירים.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

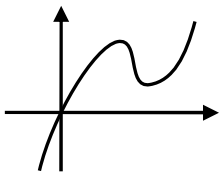
ג. נתון: למשוואה: $f(x) = 32$ יש שני פתרונות. מצא את ערכו של הפרמטר p .

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = mx^3 - 6mx^2 + 9mx$, $(0 < m)$.

א. הבע באמצעות m , במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

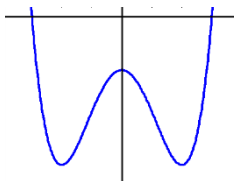
ב. נתון שנקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ ונקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = x^2 - 2mx$ הן בעלות אותו שיעור x . חשב את המרחק בין שתי נקודות אלו.

פתרונות:



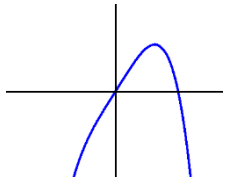
1. א. $a = 12$. ב. 1. $\max(1, 5), \min(2, 4)$.

2. $(0, 0)$. 3. עולה: $2 < x$ או $x < 1$; יורדת: $1 < x < 2$.
ג. השרטוט משמאל. ד. שלושה.



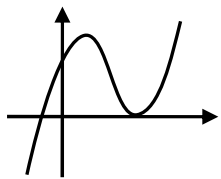
2. א. $a = 1$. ב. 1. $\min(-2, -25), \max(0, -9), \min(2, -25)$.

2. $(-3, 0), (0, -9), (3, 0)$. 3. עולה: $2 < x$ או $-2 < x < 0$; יורדת: $0 < x < 2$.
או $x < -2$. ג. השרטוט משמאל. ד. ארבעה. ה. חיובית: $3 < x$ או $x < -3$; שלילית: $-3 < x < 3$.



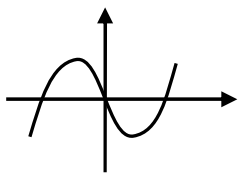
3. א. $p = 1$. ב. 1. $(0, 0), (1.59, 0)$. 2. עולה: $x < 1$; יורדת: $1 < x$.

ג. השרטוט משמאל. ד. למשוואה השנייה.



4. א. $b = 24$. ב. 1. $\max(1, 27), \min(4, 0)$.

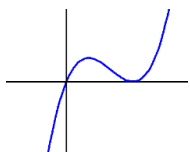
2. עולה: $4 < x$ או $x < 1$; יורדת: $1 < x < 4$. 3. $(0, 16)$.
ד. השרטוט משמאל.



5. א. 1. $\max(-m, 2m^3), \min(m, -2m^3)$.

2. עולה: $m < x$ או $x < -m$; יורדת: $-m < x < m$.

3. $(-\sqrt{3}m, 0), (\sqrt{3}m, 0), (0, 0)$. ב. השרטוט משמאל. ג. $m = 2$.



6. א. 1. $\max(2p, 32p^3), \min(6p, 0)$.

2. עולה: $6p < x$ או $x < 2p$; יורדת: $2p < x < 6p$. 3. $(0, 0), (6p, 0)$.

ב. השרטוט משמאל. ג. $p = 1$.

7. א. $\max(1, 4m), \min(3, 0)$. ב. 5 יח' אורך.

חקירת פונקציית פולינום - סעיפי חשיבה מיוחדים

שימו לב!

מטרתנו של עמוד זה היא תרגול יסודי בסוגים שונים של סעיפי חשיבה המתלווים לחקירת הפונקציה. לאחר חקירת הפונקציה בסעיפים א'-ה' הסטנדרטיים, תופיע סדרה ארוכה של סעיפי חשיבה המתייחסים לחקירה שבוצעה. **מרבית הסעיפים נפתרים תוך שימוש והבנה של גרף הפונקציה $f(x)$ שכבר שרטטנו, ואינם דורשים חישובים מורכבים ויוצאי דופן כפי שנראה במבט ראשון.**

סעיפי החקירה הבסיסית:

א) חקור את הפונקציה: $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה.
2. נקודות החיתוך עם הצירים.
3. נקודות הקיצון וסוגן.
- ב) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים לחקירה שכבר בוצעה:

- ג) מצא עבור אילו ערכי x :
 1. מתקיים עבור גרף הפונקציה: $f(x) > 0$.
 2. מתקיים עבור הנגזרת: $f'(x) < 0$.
- ד) מבלי לפתור ישירות את המשוואה, מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 100$.
- ה) מצא עבור אילו ערכי m , לישר $y = m$ יהיו ארבע נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $f(x)$.
- ו) מצא עבור אילו ערכי k , למשוואה $f(x) = k$ יהיו שלושה פתרונות.
- ז) מצא עבור אילו ערכי p , הישר $y = p$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.
- ח) מצא עבור אילו ערכי n , הישר $x = n$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה הנמצאת על אחד הצירים.

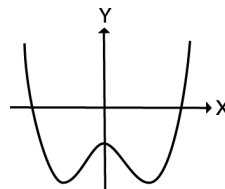
סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים להגדרת פונקציה חדשה:

- ט) מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = -f(x)$.
 1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 2. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$.
 3. מצא עבור אילו ערכי k , הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$.
- י) מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = 2 \cdot f(x)$.
 1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
 2. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $h(x)$ בשתי נקודות שונות.
 3. חשב את שטח המשולש שקודקודיו הם נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $h(x)$.
- יא) מגדירים פונקציה חדשה: $p(x) = f(x) + 9$.
 1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $p(x)$.
 2. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $p(x) = 0$.
- יב) מגדירים פונקציה חדשה: $n(x) = |p(x)|$.
 1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $n(x)$.
 2. מצא כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה $n(x)$.

חקירת פונקציית פולינום - סעיפי חשיבה מיוחדים (פתרונות)

פתרונות:

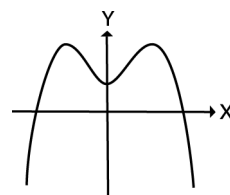
- א. 1) כל x . 2) $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -9)$. 3) $\min(2, -25)$, $\max(0, -9)$, $\min(-2, -25)$.
ב. השרטוט:



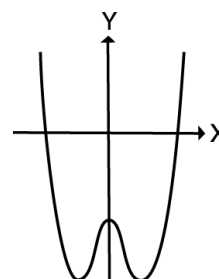
- ג. 1) $3 < x$ או $x < -3$. 2) $0 < x < 2$ או $x < -2$.
ד. שניים.
ה. $-25 < m < -9$.
ו. $k = -9$.
ז. $p = -9, -25$.
ח. $n = -3, 0, 3$.

סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים להגדרת פונקציה חדשה:

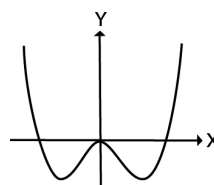
- ט. 1) השרטוט: 2) $\max(-2, 25)$, $\min(0, 9)$, $\max(2, 25)$. 3) $k > 25$.



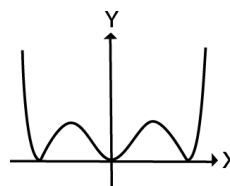
- י. 1) השרטוט: 2) $y = -50$. 3) 64 יח"ר.



- יא. 1) השרטוט: 2) שלושה.

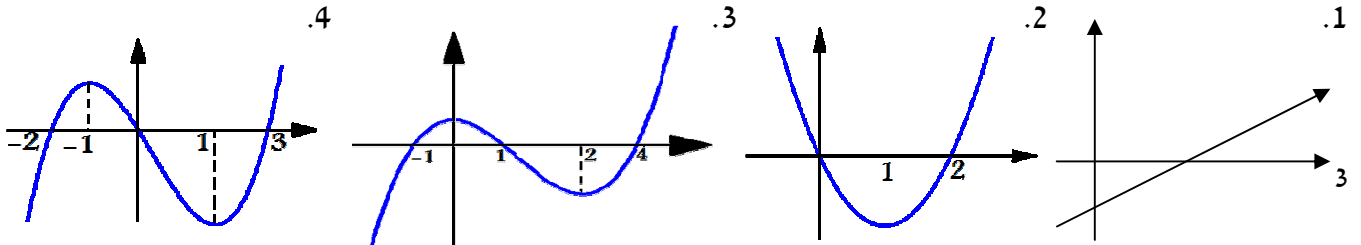


- יב. 1) השרטוט: 2) חמש.

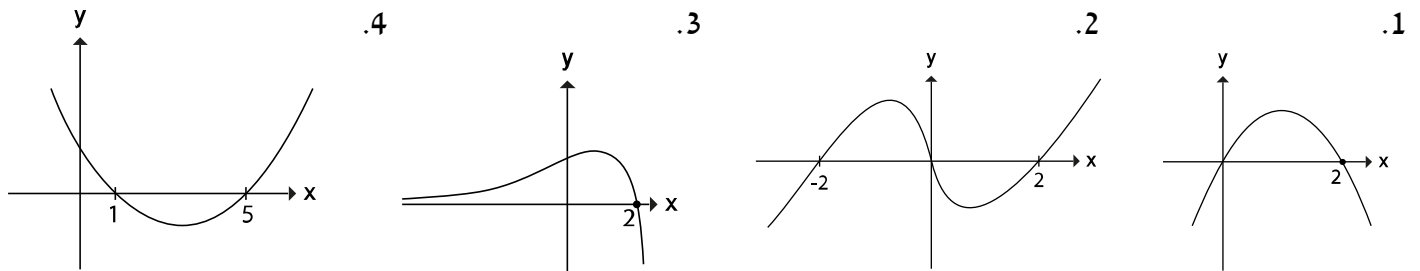


גרף הנגזרת $f'(x)$

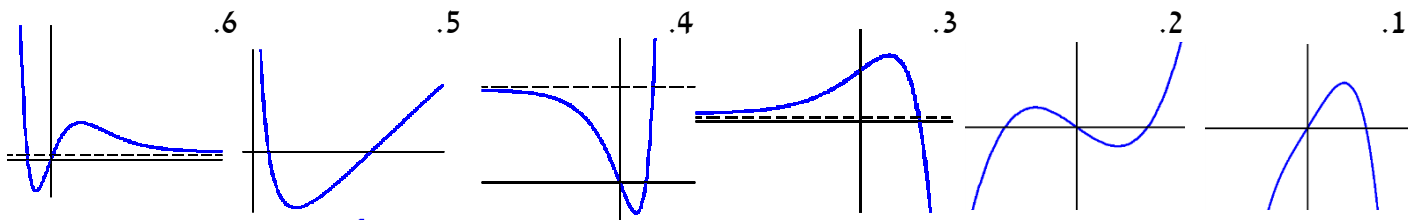
א) בתרגילים הבאים מופיע גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג נקודות הקיצון (max או min):



ב) בתרגילים הבאים מופיע גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. מצא את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה $f(x)$:

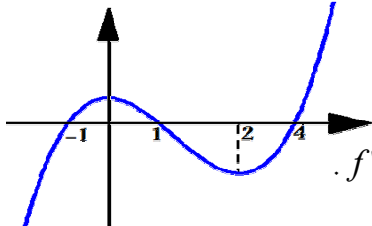


ג) נתונים שישה גרפים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וארבעה תיאורים מילוליים של גרף הפונקציה $f(x)$. עליך לקבוע, עבור כל שרטוט, לאיזה מהתיאורים הוא עשוי להתאים: תיאור א': לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום ששיעור ה- x שלה הוא -3. תיאור ב': לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ששיעור ה- x שלה 2. תיאור ג': לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום על ציר ה- y (שתי אפשרויות). תיאור ד': לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ששיעור ה- x שלה 4 ונקודת מינימום ששיעור ה- x שלה -4.

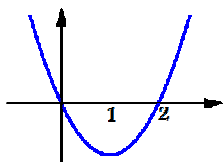


ד) בשרטוט מופיע גרף הפונקציה $f(x)$.

- מצא את שיעורי ה- x של הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת.
- מצא את התחומים בהם הנגזרת שלילית ואת התחומים בהם היא חיובית.
- באמצעות תוצאות הסעיפים הקודמים, שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

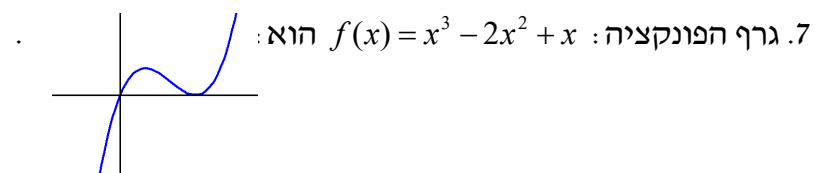
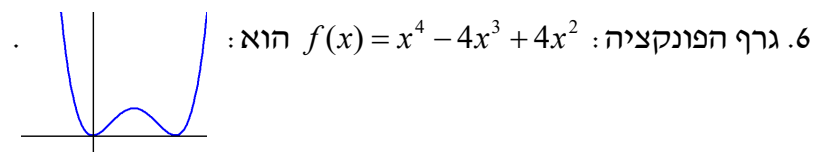
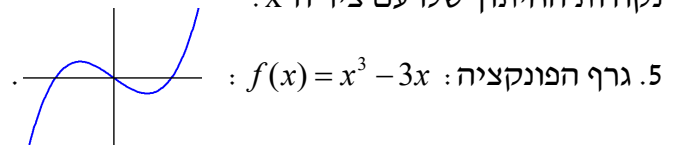


- פתרונות:** א) 1. נקודת מינימום כאשר: $x=3$. 2. נקודת מינימום כאשר: $x=2$. נקודת מקסימום כאשר: $x=0$.
 3. נקודת מינימום כאשר: $x=-1$ וכאשר $x=4$. נקודת מקסימום כאשר: $x=1$.
 4. נקודת מינימום כאשר: $x=-2$ וכאשר $x=3$. נקודת מקסימום כאשר: $x=0$.
 ב) 1. עולה: $0 < x < 2$, יורדת: $x > 2$ או $x < 0$. 2. עולה: $-2 < x < 0$ או $x > 2$, יורדת: $0 < x < 2$ או $x < -2$.
 3. עולה: $x < 2$, יורדת: $x > 2$. 4. עולה: $x > 5$ או $x < 1$, יורדת: $1 < x < 5$.
 ג) $2=d, 1=g, 5=b, 6=a$.
 ד) 1) $x=0, 2$. 2) שלילית: $0 < x < 2$, חיובית: $2 < x$ או $x < 0$. 3)

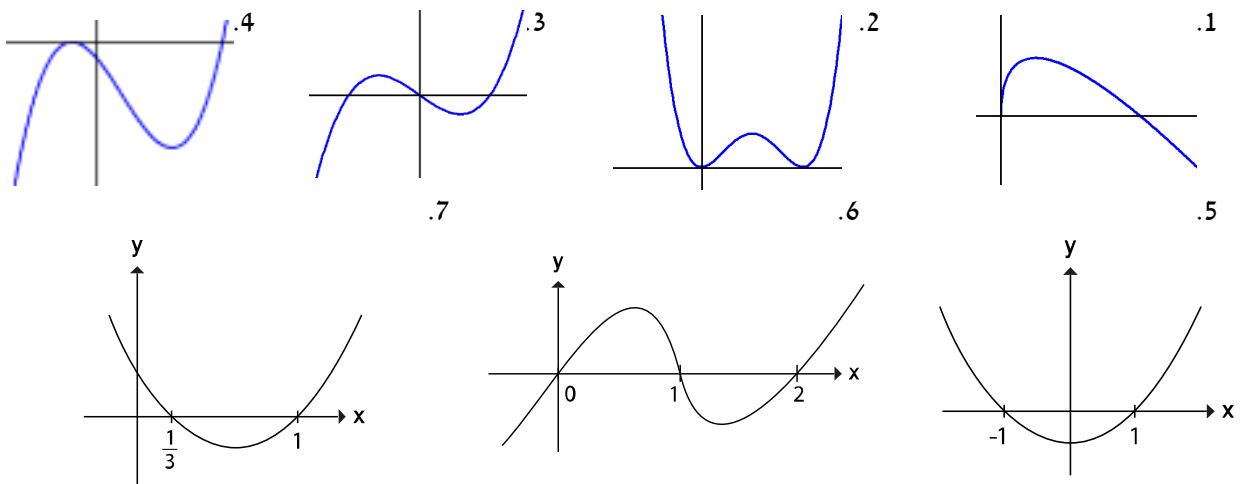


גרף הנגזרת - תרגילים שונים

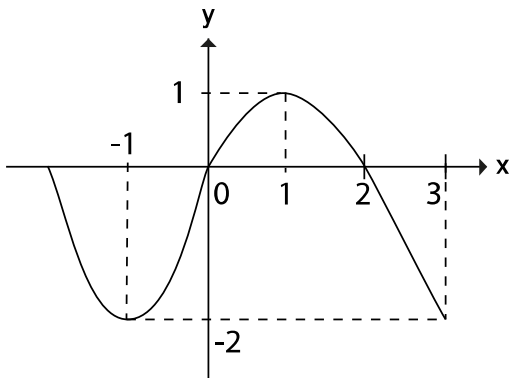
1. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $0 \leq x \leq 7$ בהסתמך על הנתונים הבאים:
 $f'(1) = 0, f(7) = -3, f(0) = f(5) = 0$.
 $f'(x) < 0$ בתחום $1 < x < 7$ ומתקיים: $f'(x) > 0$ בתחום: $0 < x < 1$.
 2. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-2 \leq x \leq 6$ בהסתמך על הנתונים הבאים:
 $g'(0) = g'(2) = g'(4) = 0, g(-2) = g(6) = 7, g(0) = g(4) = 0$.
 $g'(x) < 0$ בתחום $2 < x < 4$ או $x < 0$ ומתקיים: $g'(x) > 0$ בתחום: $0 < x < 2$ או $4 < x < 6$.
 3. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-4 \leq x \leq 4$ בהסתמך על הנתונים הבאים:
 $f'(-2) = f'(2) = 0, f(-4) = -6, f(4) = 6, f(-3) = f(0) = f(3) = 0$.
 $f'(x) < 0$ בתחום $-2 < x < 2$ ומתקיים: $f'(x) > 0$ בתחום: $-4 < x < -2$ או $2 < x < 4$.
 4. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-3 \leq x \leq 5$ בהסתמך על הנתונים הבאים:
 $f'(-1) = f'(3) = 0, f(-3) = -5, f(5) = 3, f(-1) = f(4) = 0$.
 $f'(x) < 0$ בתחום $-1 < x < 3$ ומתקיים: $f'(x) > 0$ בתחום: $-3 < x < -1$ או $3 < x < 5$.
- בתרגילים הבאים נתון גרף הפונקציה $f(x)$. השתמש בנתון, שרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$ ומצא את נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x :



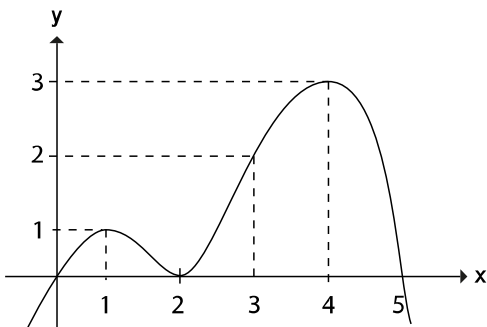
פתרונות:



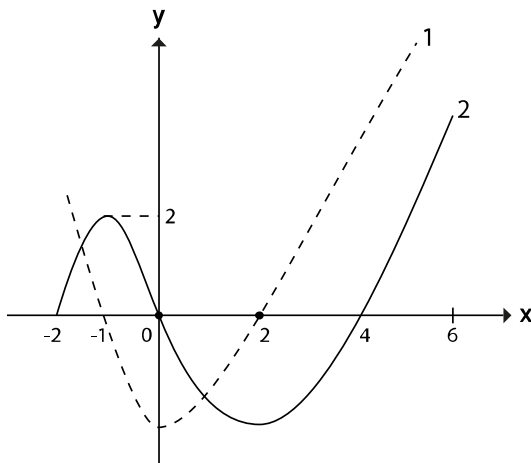
גרף הנגזרת - תרגילים שונים



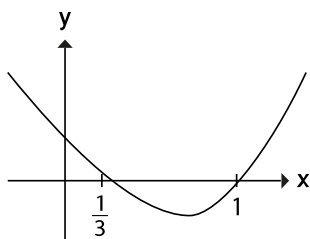
1. נתון שרטוט של גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום: $-2 \leq x \leq 3$. מצא את:
 - א. שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של גרף $f(x)$.
 - ב. תחומי העליה והירידה של גרף $f(x)$ בתחום: $-2 < x < 3$.
 - ג. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(-1, 4)$ הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(1, 6)$ הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.



2. נתון שרטוט של גרף הנגזרת $f'(x)$. מצא את:
 - א. שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של גרף $f(x)$ ואת סוגן.
 - ב. תחומי העליה והירידה של גרף $f(x)$.
 - ג. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(3, 5)$ הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.



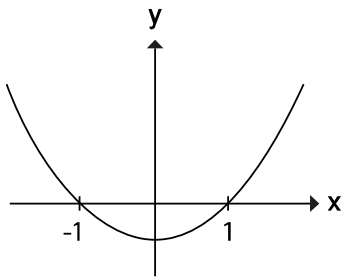
3. נתונים גרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל נגזרתה $f'(x)$ בתחום: $-2 \leq x \leq 6$.
 - א. (*) התאם בין מספרי הגרפים (1 ו-2) לבין $f(x)$ ו- $f'(x)$.
 - ב. מצא את תחומי העליה והירידה של גרף $f(x)$.
 - ג. מצא באילו תחומים הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית.
 - ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה בה $x = -1$.
 - ה. מצא באילו תחום מתקיים: $f'(x) \cdot f(x) > 0$.



4. עבור הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + mx$ נתון גרף הנגזרת $f'(x)$. מצא את:
 - א. ערכו של הפרמטר m.
 - ב. נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

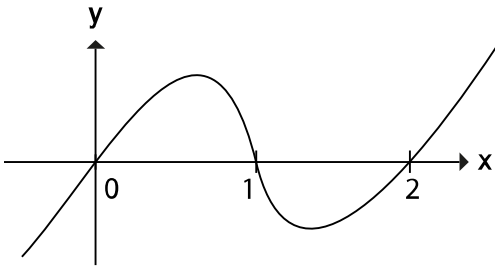
- פתרונות:**
1. א) 0, 2. ב) עליה: $0 < x < 2$, ירידה: $2 < x < 3$. ג) $y = -2x + 2$ (ד) $y = x + 5$.
 2. א) נקודת min כאשר $x = 0$, נקודת max כאשר $x = 5$. (כאשר $x = 2$ מתקבלת נקודת פיתול). ב) עליה: $0 < x < 2$ או $2 < x < 5$. הפונקציה אינה יורדת כלל בתחום הנתון: $0 \leq x \leq 5$.
 3. א) גרף 2 הוא $f(x)$ וגרף 1 הוא $f'(x)$ (ניתן להבין זאת מחלקו השמאלי של השרטוט). ב) עליה: $2 < x < 6$ או $-2 < x < -1$, ירידה: $-1 < x < 2$. ג) $0 < x < 6$ (ד) $y = 2$ (ה) $4 < x \leq 6$ או $0 < x < -1$.
 4. א) $m = 1$. ב) $\text{Max}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$, $\text{Min}(1, 0)$.

גרף הנגזרת - תרגילים שונים



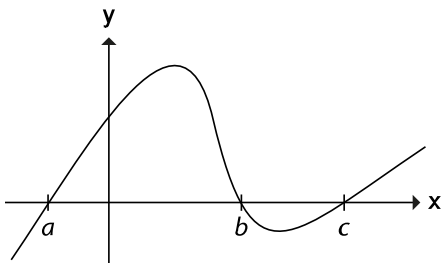
1. עבור הפונקציה: $f(x) = ax^3 - 3x$ נתון גרף הנגזרת $f'(x)$. מצא את:

- א. ערכו של הפרמטר a .
ב. נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

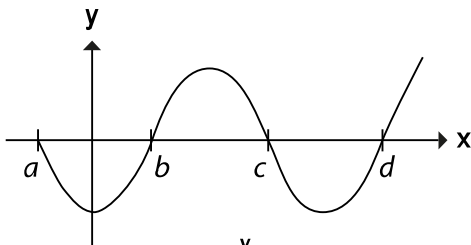


2. עבור הפונקציה: $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ נתון גרף הנגזרת $f'(x)$. מצא את:

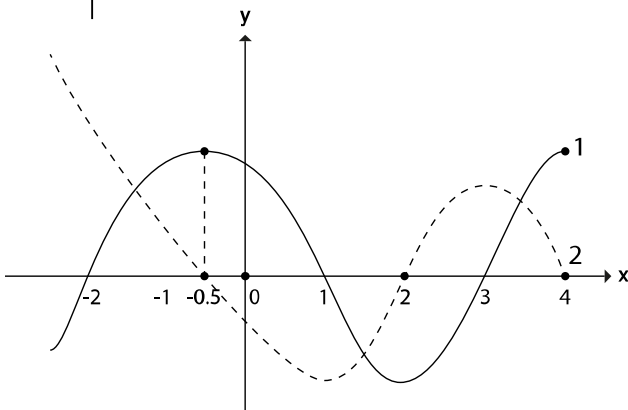
- א. ערכם של הפרמטרים a ו- b .
ב. נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.



3. בשרטוט מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$. נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ היא $(3, 7)$. המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה בה $x = 5$ מקביל לציר ה- x . הישר $y = -3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה בה $x = -1$.
א. מצא את ערכם של הפרמטרים a , b ו- c .
ב. בכמה נקודות בתחום המצויר מתאפסת הנגזרת השנייה $f''(x)$.



4. בשרטוט מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$. נתון שהפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $2 < x < 5$ ובתחום $-1 < x < 1$. מצא:
א. את שיעורי ה- x של נקודות המינימום של גרף $f(x)$.
ב. בכמה נקודות בתחום המצויר מתאפסת הנגזרת השנייה $f''(x)$.



5. בשרטוט מופיעים הגרפים של הנגזרת הראשונה $f'(x)$ ושל הנגזרת השנייה $f''(x)$.

- א. קבע איזה גרף, 1 או 2, הוא גרף $f'(x)$. נמק.
ב. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
ג. מצא כמה נקודות מינימום יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המופיע בשרטוט.

פתרונות:

1. א. $a = 1$. ב. $\text{Max}(-1, 2)$, $\text{Min}(1, -2)$.
2. א. $a = -4$, $b = 4$. ב. $\text{Min}(0, 0)$, $\text{Max}(1, 1)$, $\text{Min}(2, 0)$.
3. א. $a = -1$, $b = 3$, $c = 5$. ב. שתיים.
4. א. $x = 1$, $x = 5$. ב. שלוש.
5. א. גרף 1. ב. עולה: $3 < x < 4$ או $-2 < x < 1$. ירידה: $1 < x < 3$ או $x < -2$. ג. שתיים.

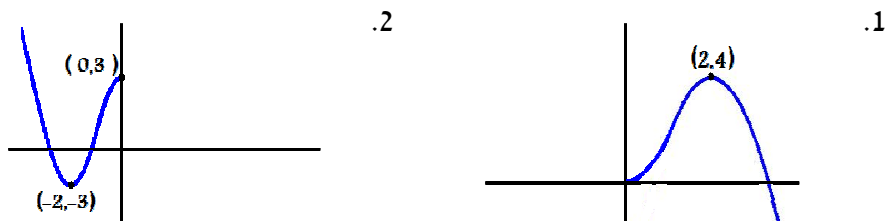
גרף הנגזרת - תרגילים שונים

תזכורת!

אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אז הנגזרת $f'(x)$ היא אי זוגית.
אם הפונקציה $f(x)$ היא אי זוגית, אז הנגזרת $f'(x)$ היא זוגית.

בתרגילים הבאים משורטט גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. ידוע שהפונקציה $f(x)$ היא אי זוגית. השלימו את השרטוט ומצאו:

- (א) כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים.
(ב) את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ ואת סוגן.
(ג) בכמה נקודות חותך הישר $y = 1$ את גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

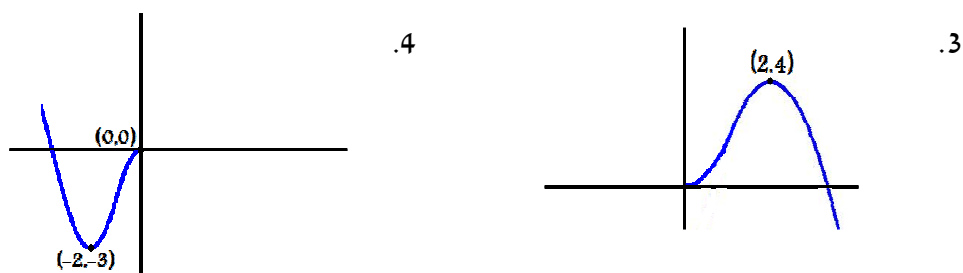


פתרונות:

1. א. שלוש. ב. $Max(-2, 4), Min(0, 0), Max(2, 4)$. ג. ארבע.
2. א. חמש. ב. $Max(0, 3), Min(2, -3), Min(-2, -3)$. ג. ארבע.

בתרגילים הבאים משורטט גרף הנגזרת $f'(x)$. ידוע שהנגזרת השנייה $f''(x)$ היא זוגית. השלימו את השרטוט ומצאו:

- (א) כמה נקודות חיתוך יש לגרף הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים.
(ב) את נקודות הקיצון של גרף הנגזרת $f'(x)$ ואת סוגן.
(ג) בכמה נקודות חותך הישר $y = -3$ את גרף הנגזרת $f'(x)$.



פתרונות:

3. א. שלוש. ב. $Min(-2, -4), Max(2, 4)$. ג. שלוש.
4. א. שלוש. ב. $Min(-2, -3), Max(2, 3)$. ג. שתיים.