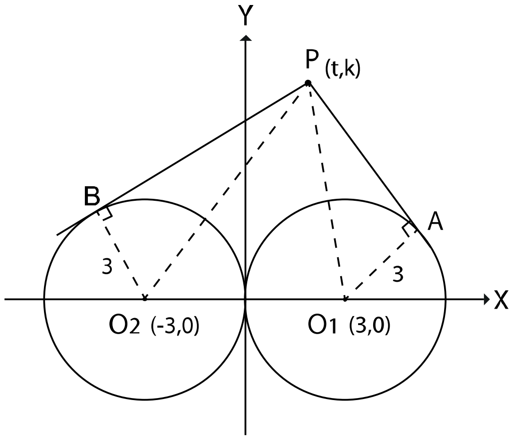
פתרון מלא - מבחן אתגר 1

שאלה 1



א. זוהי שאלת מקום גיאומטרי. בתרגילים מסוג זה, נפעל לפי השלבים :

1. נסמן את הנקודה P כ: $P(t,k)$.
2. נביע את שאר הנתונים בעזרת הפרמטרים t ו-k.
3. נמצא משוואה המקשרת בין **כל** הנתונים בשאלה וזוהי משוואת המקום הגיאומטרי.
4. לאחר סידור המשוואה נחליף בחזרה את הפרמטרים t ו-k באותיות x ו- y בהתאמה.

ניעזר בשרטוט ונראה כי עלינו להביע את אורכי המשיקים AP ו- PB. ידוע כי המשיק והרדיוס מאונכים זה לזה בנקודת ההשקה. נוכל להיעזר בשני המשולשים ישרי הזווית : ΔAO_1P ו- ΔBO_2P כדי להביע את אורכי המשיקים בעזרת משפט פיתגורס.

נמצא את אורכו של AP במשולש ΔAO_1P : $AP=\sqrt{O_1P^2-O_1A^2}$

נבטא את אורכו של היתר O_1P כמרחק בין הנקודות P ו- O_1 : $O_1P=\sqrt{(t-3)^2+k^2}$

O_1A הוא רדיוס המעגל ולכן : $O_1A=3$. נחזור ונציב כדי לבטא את אורכו של AP :

$$AP=\sqrt{(t-3)^2+k^2-9}\ \rightarrow\ \boxed{AP=\sqrt{t^2+k^2-6t}}$$

נחזור על התהליך פעם נוספת עבור המשולש ΔBO_2P ונקבל כי : $\boxed{BP=\sqrt{t^2+k^2+6t}}$.

על פי הנתון : $AB+AP=10$. זו תהיה המשוואה המקשרת בה נשתמש למציאת המקום הגיאומטרי :

$$\sqrt{t^2+k^2-6t}+\sqrt{t^2+k^2+6t}=10$$

נעלה בריבוע ונקבל:

$$t^2-\cancel{6}t+k^2+2\sqrt{t^2+k^2-6t}\sqrt{t^2+k^2+6t}+t^2+\cancel{6}t+k^2=100\rightarrow$$

$$2t^2+2k^2+2\sqrt{(t^2+k^2-6t)(t^2+k^2+6t)}=100\ \rightarrow\ t^2+k^2+\sqrt{\left((t^2+k^2)-6t\right)\cdot\left((t^2+k^2)+6t\right)}=50$$

נעביר אגפים וניעזר בתוך סימן השורש בנוסחה : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$\sqrt{\left(t^2+k^2\right)^2-36t^2}=50-(t^2+k^2)$$

נעלה בריבוע פעם נוספת :

$$\left(t^2+k^2\right)^2-36t^2=\left(50-(t^2+k^2)\right)^2\ \rightarrow\ \cancel{\left(t^2+k^2\right)^2}-36t^2=2500-100(t^2+k^2)+\cancel{\left(t^2+k^2\right)^2}\ \rightarrow$$

$$-36t^2=2500-100t^2-100k^2\ \rightarrow 64t^2+100k^2=2500\ \rightarrow\ 16t^2+25k^2=625$$

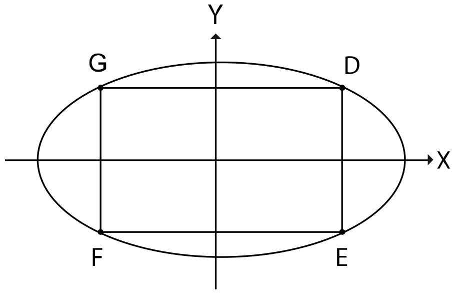
כעת משקיבלנו משוואה נחליף בחזרה את t ו-k ב-x ו-y בהתאמה :

$$16x^2+26y^2=625$$

לבסוף, נסדר את המשוואה על ידי חלוקה ב- 625 ונקבל :

$$\boxed{\frac{16x^2}{625}+\frac{y^2}{25}=1}$$

ניתן לראות כי המקום הגיאומטרי שקיבלנו הוא אליפסה קנונית.



ב. קדקודי המלבן נמצאים על האליפסה $16x^2+25y^2=625$.

נסמן את קדקוד D: $D\left(t,\sqrt{\frac{625-16t^2}{25}}\right)$. את שיעור ה-y קיבלנו מהצבת $x=t$ במשוואת האליפסה ובידוד ה-y.

משיקולי סימטריה ניתן לראות כי אורך המלבן שווה לפעמיים שיעור ה-x של הנקודה D, ורוחב המלבן שווה לפעמיים שיעור ה-y של הנקודה D:

$$S=2t\cdot 2\sqrt{\frac{625-16t^2}{25}}\ \rightarrow S=4t\cdot\sqrt{\frac{625-16t^2}{25}}$$

כדי למצוא את נקודת המקסימום (הערך המקסימלי של השטח) נגזור את פונקציית השטח:

$$S'=4\cdot\sqrt{\frac{625-16t^2}{25}}+4t\cdot\frac{-\frac{32t}{25}}{2\sqrt{\frac{625-16t^2}{25}}}=0\rightarrow S'=8\left(\frac{625-16t^2}{\cancel{25}}\right)-\frac{128t^2}{\cancel{25}}=0\rightarrow$$

$$S'=8(625-16t^2)-128t^2=0\rightarrow S'=625-16t^2-16t^2=0\rightarrow S'=625-32t^2=0\rightarrow t^2=\frac{625}{32}\rightarrow \boxed{t=\frac{25}{\sqrt{32}}}$$

נגזור את הביטוי $S'=625-32t^2$ שנית, הפעם על מנת לוודא שהנקודה היא נקודת מקסימום:

$$S''=-32t\ \rightarrow S''\left(\frac{25}{\sqrt{32}}\right)=-32\left(\frac{25}{\sqrt{32}}\right)=-25\sqrt{32}$$ (נגזרת מקוצרת לבדיקת הסימן)

הנגזרת השנייה שלילית בנקודה $t=\frac{25}{\sqrt{32}}$ ולכן זוהי אכן נקודת מקסימום.

נציב את הערך $t=\frac{25}{\sqrt{32}}$ במשוואת השטח $S=4t\cdot\sqrt{\frac{625-16t^2}{25}}$ כדי למצוא את השטח המקסימלי של המלבן:

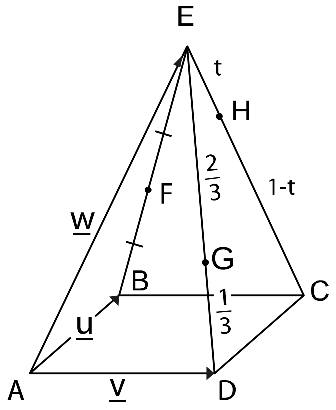
$$S\left(\frac{25}{\sqrt{32}}\right)=4\cdot\left(\frac{25}{\sqrt{32}}\right)\cdot\sqrt{\frac{625-16\cdot\left(\frac{25}{\sqrt{32}}\right)^2}{25}}\rightarrow\frac{100}{\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\frac{625-16\cdot\left(\frac{625}{32}\right)}{25}}\rightarrow\frac{100}{\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\frac{312.5}{25}}\rightarrow\boxed{S=62.5}$$

(יח"ר)

שאלה 2

א. נסמן את הנתונים בשרטוט.

נבטא את הווקטורים:

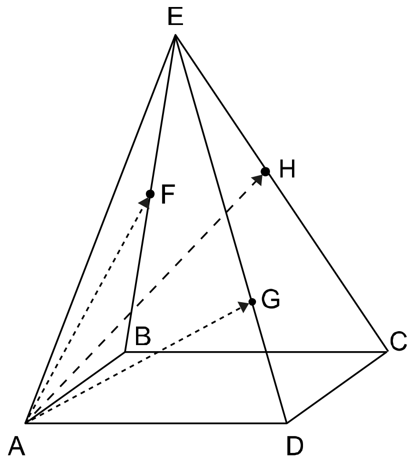


$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF} \rightarrow \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE} \rightarrow \overrightarrow{AF}=\underline{u}+\frac{1}{2}(-\underline{u}+\underline{w}) \rightarrow \overrightarrow{AF}=\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG} \rightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \rightarrow \overrightarrow{AG}=\underline{v}+\frac{1}{3}(-\underline{v}+\underline{w}) \rightarrow \overrightarrow{AG}=\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w} \rightarrow$$
$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH} \rightarrow \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+t\cdot\overrightarrow{EC} \rightarrow \overrightarrow{AH}=\underline{w}+t(-\underline{w}+\underline{v}+\underline{u}) \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AH}=(1-t)\underline{w}+t\cdot\underline{v}+t\cdot\underline{u}}$$

ב. שאלות מהסוג "מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה את הישר" הן לרוב שאלות וקטורים שניתן לפתור באמצעות **יחידות התצוגה**. יחידות התצוגה הוא עקרון לפיו **כל וקטור במרחב ניתן להצגה באופן אחד בלבד**. לכן, אם נביע וקטור בשני אופנים שונים, הרי שניתן יהיה להשוות ביניהם.



נבטא את הווקטור $\overrightarrow{AH}$ בשתי תצוגות שונות, ונשווה ביניהן:

תצוגה אחת היא התצוגה שמצאנו בסעיף א': $\boxed{\overrightarrow{AH}=t\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v}+(1-t)\cdot\underline{w}}$.

על פי הנתון, הווקטור $\overrightarrow{AH}$ מוכל במישור העובר דרך הנקודות A, F ו-G.
כלומר, ניתן גם לבטא את הווקטור $\overrightarrow{AH}$ כקומבינציה ליניארית של הווקטורים $\overrightarrow{AF}$ ו-$\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AH}=a\cdot\overrightarrow{AF}+b\cdot\overrightarrow{AG} \rightarrow \overrightarrow{AH}=a\cdot\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}\right)+b\cdot\left(\frac{2}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}\right) \rightarrow$$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{a}{2}\underline{u}+\frac{a}{2}\underline{w}+\frac{2b}{3}\underline{v}+\frac{b}{3}\underline{w} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AH}=\frac{a}{2}\underline{u}+\frac{2b}{3}\underline{v}+\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\underline{w}}$$

מכיוון ששתי התצוגות שמצאנו זהות, נוכל להשוות בין המקדמים הסקלאריים של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$:

$$\text{(I)}\quad t=\frac{a}{2} \rightarrow a=2t$$

$$\text{(II)}\quad t=\frac{2b}{3} \rightarrow b=\frac{3t}{2}$$

$$\text{(III)}\quad 1-t=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$$

נציב את I ו-II ב-III ונקבל:

$$1-t=\frac{2t}{2}+\frac{3t}{2} \rightarrow 1-t=t+\frac{t}{2} \rightarrow 2=4t+t \rightarrow \boxed{t=\frac{2}{5}}$$

מכאן שהנקודה H מחלקת את המקצוע EC ביחס של: $EH=\frac{2}{5}$ ו: $HC=\frac{3}{5}$.

לסיכום, היחס בין הקטעים הוא: 2:3.

שאלה 3

א. למשוואה ריבועית יש פתרון אחד כאשר הביטוי בתוך השורש (הדלתא Δ) בנוסחת השורשים שווה ל-0:

$$\Delta = b^2 - 4ac \ \rightarrow\ \Delta = \left(2(mi+a)\right)^2 - 4m(3+4i) \ \rightarrow\ \Delta = 4\left(mi+a\right)^2 - 12m - 16mi$$

$$\rightarrow\ \Delta = 4\left(-m^2 + 2mai + a^2\right) - 12m - 16mi$$

$$\Delta - 4m^2 + 8mai + 4a^2 - 12m - 16mi = 0 \ \rightarrow\ -4m^2 + 4a^2 - 12m + (8ma - 16m)i = 0$$

הביטוי באגף השמאלי שווה ל-0 כאשר החלק <u>הממשי</u> וגם החלק <u>המדומה</u> שווים ל-0. נשווה את שניהם ל-0:

$$8ma - 16m = 0 \ \rightarrow\ 8m(a-2) = 0 \ \rightarrow\ \boxed{a=2}\ ,\ \ (0 < m)$$

$$-4m^2 + 4a^2 - 12m = 0 \rightarrow -4m^2 + 4\cdot 2^2 - 12m = 0 \rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \rightarrow (m-1)(m+4) = 0 \rightarrow \boxed{m=1}\ (0 < m)$$

ב. נציב $m=1$ ו: $a=2$ במשוואה ונפתור אותה:

$$Z^2 + 2(i+2)\cdot Z + 3 + 4i = 0 \ \rightarrow\ Z^2 + (2i+4)\cdot Z + 3 + 4i = 0$$

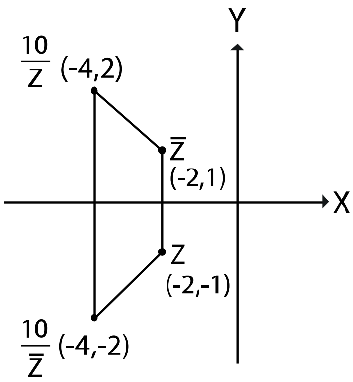
$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \ \rightarrow\ Z = \frac{-(2i+4)}{2} \ \rightarrow\ \boxed{Z = -2 - i}$$

נמצא את הערכים של המספרים המרוכבים $\overline{Z}$, $\frac{10}{Z}$ ו: $\frac{10}{\overline{Z}}$:

$$\boxed{\overline{Z} = -2 + i}$$

$$\frac{10}{Z} = \frac{10}{-2-i} = \frac{10(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-20+10i}{4+1} \ \rightarrow\ \frac{10}{Z} = -4 + 2i$$

$$\frac{10}{\overline{Z}} = \frac{10}{-2+i} = \frac{10(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-20-10i}{4+1} \ \rightarrow\ \frac{10}{\overline{Z}} = -4 - 2i$$



נמקם את ארבע הנקודות במישור גאוס.

ניתן לראות כי המרובע הוא טרפז שבסיסיו מקבילים לציר ה-y.

נחשב את שטחו:

$$S = \frac{(2+4)(-2-(-4))}{2} \ \rightarrow\ S = \frac{12}{2} \ \rightarrow\ \boxed{S = 6}\ \text{(יח"ר)}$$

ג. על פי הנתונים: $a_1 = -2 + i$ ו- $a_2 = -4 - 2i$. נחשב את הפרש הסדרה החשבונית:

$$d = a_2 - a_1 \ \rightarrow\ d = -4 - 2i - (-2+i) \ \rightarrow\ \boxed{d = -2 - 3i}$$

סכום הסדרה החשבונית הוא: $-420 + 550i$. ניעזר בנוסחה לחישוב סכום סדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + d(n-1)\right) \ \rightarrow\ -420 - 550i = \frac{n}{2}\left(2(-2+i) + (-2-3i)(n-1)\right) \ \rightarrow$$

$$-840 - 1100i = n(-4 + 2i - 2n + 2 - 3in + 3i) \ \rightarrow\ -840 - 1100i = -2n + 5ni - 2n^2 - 3n^2 i \ \rightarrow$$

$$2n - 5ni + 2n^2 + 3n^2 i - 840 - 1100i = 0 \ \rightarrow\ 2n^2 + 2n - 840 + (3n^2 - 5n - 1100)i = 0$$

האגף השמאלי מתאפס כאשר החלק <u>הממשי</u> וגם החלק <u>המדומה</u> מתאפסים ולכן:

$2n^2 + 2n - 840 = 0$. פתרונות המשוואה הם: $\boxed{n=20}$ ו: $n = -21$.

$3n^2 - 5n - 1100 = 0$. פתרונות המשוואה הם: $\boxed{n=20}$ ו: $n = -18\frac{1}{3}$.

הפתרון שמאפס את שתי המשוואות הוא: $\boxed{n=20}$, וזהו מספר איברי הסדרה.

שאלה 4

א. נמלא את הנתונים בטבלה:

על פי הנוסחה:
$M_t = M_0 \cdot q^t$

	כמות העצים ביער עד הכריתה
כמות התחלתית	n
קצב גידול	$q=\left(1+\frac{p}{100}\right)$
זמן	x
כמות סופית	$n\cdot q^x$

בשלב זה נכרתו 3n עצים, ורגע לאחר מכן, היתה כמות העצים ביער: $n\cdot q^x-3n$.

נמלא בטבלה חדשה את נתוני הגידול בתקופה הבאה:

	כמות העצים ביער x שנים לאחר הכריתה
כמות התחלתית	$n\cdot q^x-3n$
קצב גידול	$q=\left(1+\frac{p}{100}\right)$
זמן	x
כמות סופית	$(n\cdot q^x-3n)\cdot q^x$

על פי הנתון הכמות הסופית של העצים x שנים לאחר הכריתה היא 4n, ולכן:

$$(n\cdot q^x-3n)\cdot q^x=4n \to \cancel{n}\left(q^x\right)^2-3\cancel{n}\cdot q^x-4\cancel{n}=0 \xrightarrow{t=q^x} t^2-3t-4=0 \to (t-4)(t+1)=0$$

$$t=4 \to q^x=4 \to x=\frac{\ln 4}{\ln q}$$

נזכור כי: $q=\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ונקבל כי: $\boxed{x=\frac{\ln 4}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}}$.

ב. נמלא את הנתונים בטבלה:

	כמות העצים ביער
כמות התחלתית	m
קצב גידול	$q=\left(1+\frac{p}{100}\right)$
זמן	$3x$
כמות סופית	$m\cdot q^{3x}$

נפתח את הביטוי המתאר את הכמות הסופית: $m\cdot q^{3x}$:

נזכור כי על פי סעיף א', $x=\frac{\ln 4}{\ln q}$. ניעזר בנוסחה למעבר מבסיס לבסיס: $\frac{\ln a}{\ln b}=\log_b a$ ונקבל כי:

$$x=\frac{\ln 4}{\ln q} \to x=\log_q 4$$

נציב את ערך x בביטוי $m\cdot q^{3x}$ ונקבל: $m\cdot q^{3x}=m\cdot q^{3\log_q 4}=m\cdot q^{\log_q 64}$

נזכור את הכלל: $a^{\log_a b}=b$: $m\cdot q^{\log_q 64}=m\cdot 64=\boxed{64m}$

שאלה 5

א. לפונקציה $f(x)=\log_b(x^2+bx+c)$ יש אסימפטוטה אנכית כאשר הביטוי שבתוך ה-log מתאפס:

$$x^2+bx+c=0$$

לפונקציה יש אסימפטוטה אחת בלבד, ולכן למשוואה יש רק פתרון אחד. מכאן ש: $\Delta=0$:

$$\Delta=b^2-4ac=0 \rightarrow b^2-4c=0 \rightarrow b^2=4c \rightarrow \boxed{c=\frac{b^2}{4}}$$

נציב ונקבל את הפונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\log_b\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right) \rightarrow \boxed{f(x)=\log_b\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}$$

לפונקציה יש אסימפטוטה כאשר הביטוי שבתוך ה-log מתאפס:

$$x+\frac{b}{2}= \rightarrow \boxed{x=-\frac{b}{2}}$$

ב. נבדוק תחילה אם יש לפונקציה נקודות קיצון. נגזור ונשווה ל-0:

$$f(x)=\log_b\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2x+b}{\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)\ln b}=0 \rightarrow 2x+b=0 \rightarrow x=-\frac{b}{2}$$

זו למעשה האסימפטוטה האנכית של הפונקציה ולכן לפונקציה <u>אין</u> נקודות קיצון. נבדוק את תחומי העליה והירידה באמצעות טבלת עלייה וירידה:

תחום x	$x<-\frac{b}{2}$	$x=-\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{2}<x$
נציב בנגזרת	$-b$	אס'	0
סימן הנגזרת	-		+
הפונקציה עולה/יורדת	↘		↗

מכאן שתחום הירידה הוא: $\boxed{x<-\frac{b}{2}}$, ותחום העלייה הוא: $\boxed{-\frac{b}{2}<x}$.

ג. נציב $x=0$ ונמצא את נקודת החיתוך עם ציר ה-y:

$$f(0)=\log_b\left(0^2+b\cdot 0+\frac{b^2}{4}\right) \rightarrow f(0)=\log_b\left(\frac{b^2}{4}\right) \rightarrow \boxed{\left(0,\log_b\left(\frac{b^2}{4}\right)\right)}$$

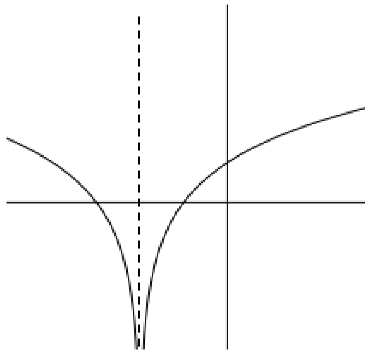
נציב $y=0$ ונמצא את נקודת החיתוך עם ציר ה-x:

$$\log_b\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)=0 \rightarrow x^2+bx+\frac{b^2}{4}=b^0 \rightarrow x^2+bx+\frac{b^2}{4}=1 \rightarrow x^2+bx+\frac{b^2}{4}-1=0 \rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\left(\frac{b^2}{4}-1\right)}}{2} \rightarrow \frac{-b\pm\sqrt{b^2-b^2+4}}{2} \rightarrow \frac{-b\pm 2}{2} \rightarrow \quad x=1-\frac{b}{2} \quad , \quad x=-1-\frac{b}{2}$$

כלומר, נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן: $\boxed{\left(1-\frac{b}{2},0\right)}$ ו- $\boxed{\left(-1-\frac{b}{2},0\right)}$.

ד. נשרטט את הסקיצה של הפונקציה $f(x)$ על סמך החקירה עד כה:



כיוון ש: $2 < b$, נוכל לדעת היכן לסמן את נקודות החיתוך על ציר ה-x:

הביטוי $\frac{b}{2}-1$ הוא <u>בהכרח</u> שלילי (כי השבר הימני גדול מ-1).

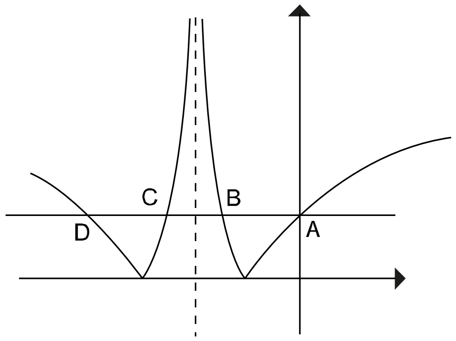
הביטוי $-1-\frac{b}{2}$ נמצא <u>שמאלה יותר</u> על ציר ה-x כי הוא קטן ב-2 מהביטוי הקודם.

האסימפטוטה $-\frac{b}{2}$ נמצאת בדיוק ביניהן, במרחק <u>שווה</u> משתיהן.

ה.

*** סעיף זה קשה מהרגיל.**

נתבונן בטרנספורמציה $g(x)=|f(x)|$. ללא חקירה נוספת נוכל לקבוע כי הטרנספורמציה הופכת את כל הערכים השליליים של הפונקציה לחיוביים, ואינה משפיעה כלל על הערכים החיוביים. למעשה, חלקי הפונקציה שנמצאים מתחת לציר ה-x מתהפכים אל מעל לציר ה-x. שרטוט $g(x)$ נראה כך:



נוסיף לציור גם את הישר העובר בנקודות A, B, C ו-D.

שיעורי הנקודה A הם: $\left(0,\log_b\left(\frac{b^2}{4}\right)\right)$. בפונקציה $f(x)$ הנקודות B ו-C היו מתחת לציר ה-x ושיעורי ה-y שלהן היה למעשה: $-\log_b\left(\frac{b^2}{4}\right)$.

כך נוכל למצוא את שיעור ה-x המקורי שלהן, שהוא למעשה אותו שיעור x גם לאחר הטרסנפורמציה:

$$\log_b\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)=-\log_b\left(\frac{b^2}{4}\right)\rightarrow\log_b\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)=\log_b\left(\frac{b^2}{4}\right)^{-1}\rightarrow$$

$$\log_b\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)=\log_b\left(\frac{4}{b^2}\right)\rightarrow x^2+bx+\frac{b^2}{4}=\frac{4}{b^2}\rightarrow x^2+bx+\frac{b^2}{4}-\frac{4}{b^2}=0$$

פתרונות המשוואה על פי נוסחת השורשים הם: $x_B=-\frac{b}{2}+\frac{2}{b}$ ו- $x_C=-\frac{b}{2}-\frac{2}{b}$.

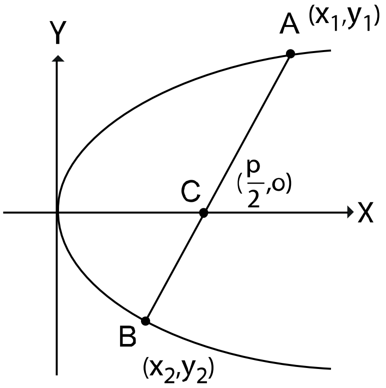
על פי הנתון המרחק בין הנקודות הוא 1 ולכן:

$$x_B-x_C=1\rightarrow-\frac{b}{2}+\frac{2}{b}-\left(-\frac{b}{2}-\frac{2}{b}\right)=1\rightarrow\frac{2}{b}+\frac{2}{b}=1\rightarrow\frac{4}{b}=1\rightarrow\boxed{b=4}$$

פתרון מלא - מבחן אתגר 2

שאלה 1

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**



א. נסמן את הנקודות A ו-B בשרטוט:

עלינו להוכיח כי מתקיים: $y_1 \cdot y_2 = -p^2$.

ניעזר במשוואת הפרבולה $y^2 = 2px$ כדי לבטא את הנקודות A ו-B בעזרת ערכי ה-y בלבד:

עבור הנקודה $A(x_1,y_1)$ נקבל: $y_1^2 = 2px_1 \rightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{2p} \rightarrow \boxed{A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)}$

עבור הנקודה $B(x_2,y_2)$ נקבל: $y_2^2 = 2px_2 \rightarrow x_2 = \frac{y_2^2}{2p} \rightarrow \boxed{B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)}$

המיתר AB עובר דרך מוקד הפרבולה $\boxed{C\left(\frac{p}{2},0\right)}$. נביע באמצעות p, y_1 ו- y_2 את שיפועי הישרים AC ו-BC, ולאחר מכן נשווה ביניהם:

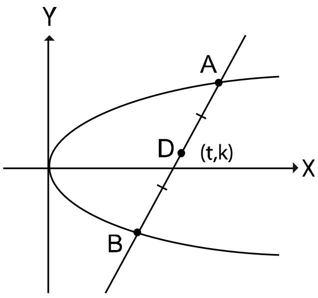
$$m_{AC} = \frac{y_1 - 0}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{p}{2}} \rightarrow \frac{y_1}{\frac{y_1^2 - p^2}{2p}} \rightarrow \frac{y_1 \cdot 2p}{y_1^2 - p^2}$$

$$m_{BC} = \frac{y_2 - 0}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{p}{2}} \rightarrow \frac{y_2}{\frac{y_2^2 - p^2}{2p}} \rightarrow \frac{y_2 \cdot 2p}{y_2^2 - p^2}$$

$$m_{AC} = m_{BC} \rightarrow \frac{y_1 \cdot \cancel{2p}}{y_1^2 - p^2} = \frac{y_2 \cdot \cancel{2p}}{y_2^2 - p^2} \rightarrow \frac{y_1}{y_1^2 - p^2} = \frac{y_2}{y_2^2 - p^2} \rightarrow y_1\left(y_2^2 - p^2\right) = y_2\left(y_1^2 - p^2\right) \rightarrow$$

$$y_1y_2^2 - y_1p^2 = y_2y_1^2 - y_2p^2 \rightarrow y_1y_2^2 - y_2y_1^2 = y_1p^2 - y_2p^2 \rightarrow y_1y_2\cancel{(y_2 - y_1)} = -p^2\cancel{(y_2 - y_1)} \rightarrow$$

$$\boxed{y_1y_2 = -p^2}$$



ב. נסמן את אמצע הקטע AB: $D(t,k)$.

נבטא את הנקודה D באמצעות הנוסחה לאמצע הקטע:

$$\text{(I)} \quad x_D = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow t = \frac{\frac{y_1^2}{2p} + \frac{y_2^2}{2p}}{2} \rightarrow 4pt = y_1^2 + y_2^2$$

$$\text{(II)} \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow k = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow 2k = y_1 + y_2$$

כעת עלינו "להיפטר" מהפרמטרים y_1 ו- y_2 ולהישאר עם משוואה המקשרת בין t לבין k. ניתן להשאיר את הפרמטר p במשוואה שתתקבל, כי הוא נתון בשאלה, אך לא את הפרמטרים y_1 ו- y_2 <u>שאותם הוספנו</u> כאמצעי לפתרון. נשים לב שהאגף הימני של משוואה I מכיל את ריבועי האיברים שבאגף הימני של משוואה II. כדי להתקדם בפתרון מערכת המשוואות, נעלה את משוואה II בריבוע:

$$\text{(II)} \quad (2k)^2 = (y_1 + y_2)^2 \rightarrow 4k^2 = y_1^2 2y_1y_2 + y_2^2$$

בסעיף א' הוכחנו כי: $y_1y_2 = -p^2$. נציב ונקבל:

$$\text{(II)} \quad 4k^2 = y_1^2 - 2p^2 + y_2^2 \rightarrow 4k^2 + 2p^2 = y_1^2 + y_2^2$$

כעת נוכל להשוות את I ו-II: $4pt = 4k^2 + 2p^2$

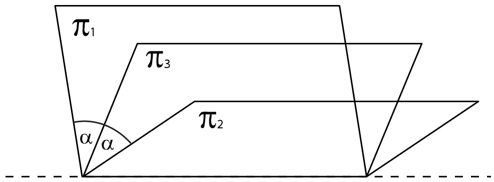
כעת נחליף את t ו-k ב-x ו-y: $4px = 4y^2 + 2p^2 \rightarrow \boxed{2y^2 = 2px - p^2}$

שאלה 2:

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. ראשית נמצא את ישר החיתוך שבין שני המישורים הנתונים. לכן "ניפטר" ראשית מאחד הנעלמים.

ניתן "להיפטר" מהנעלם y על ידי חיבור המשוואות. נחבר את שתי המשוואות ונקבל את המשוואה:



$$+\begin{cases} x+2y+2z+1=0 \\ 2x-2y+z+2=0 \end{cases}$$

$$3x+3z+3=0$$

כלומר, המשוואה המייצגת את ישר החיתוך היא: $\boxed{x+z+1=0}$.

נמצא שתי נקודות שרירותיות על ישר החיתוך.

נציב $x=0$ ונקבל $z=-1$. לאחר הצבת x ו-z באחת ממשוואות המישורים נקבל $y=0.5$ ואת הנקודה: $(0,0.5,-1)$.

נציב $z=0$ ונקבל $x=-1$. לאחר הצבת x ו-z באחת ממשוואות המישורים נקבל $y=0$ ואת הנקודה $(-1,0,0)$.

וקטור הכיוון העובר דרך שתי נקודות אלו הוא $(-1,-0.5,1)$ ולאחר הכפלה פי שניים: $\boxed{(-2,-1,2)}$.

מכיוון שהמישור π_3 עובר דרך ישר החיתוך, נוכל לומר שווקטור המקדמים של המישור π_3 מאונך לכיוון ישר החיתוך. מתקבלת המשוואה:

$$(a,b,c)(-2,-1,2)=0 \ \rightarrow \ \boxed{-2a-b+2c=0}$$

כעת נצטרך משוואה נוספת המקשרת בין a, b ו-c. נתון כי המישור π_3 יוצר זוויות שוות עם שני המישורים הנתונים.

הזווית שהמישור π_3 יוצר עם המישור π_1 היא:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|(a,b,c)(1,2,2)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}}}$$

הזווית שהמישור π_3 יוצר עם המישור π_2 היא:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|(a,b,c)(2,-2,1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}}}$$

נשווה בין שתי המשוואות: (**<u>יש לשים לב שמשיקולי ערך מוחלט יש להשוות בין המשוואות בשני מקרים</u>**):

$$\frac{(a,b,c)(1,2,2)}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cancel{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}}=\frac{(a,b,c)(2,-2,1)}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cancel{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}} \rightarrow a+2b+2c=2a-2b+c \rightarrow \boxed{a-4b-c=0}$$

<u>או</u>

$$\frac{(a,b,c)(1,2,2)}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cancel{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}}=\frac{-(a,b,c)(2,-2,1)}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cancel{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}} \rightarrow a+2b+2c=-2a+2b-c \rightarrow \boxed{3a+3c=0}$$

כעת יש לנו שתי מערכות של משוואות:

א. $\boxed{a-4b-c=0}$ או ב. $\boxed{3a+3c=0}$

$\boxed{-2a-b+2c=0}$ | $\boxed{-2a-b+2c=0}$

א.

$\boxed{a-4b-c=0}$

$\boxed{-2a-b+2c=0}$

נקבל: $b=0$, ובהתאם $a=c$.

נניח $a=1$ ונקבל $c=1$ ואת המשוואה:

$\boxed{x+z+d=0}$

ב.

$\boxed{3a+3c=0}$

$\boxed{-2a-b+2c=0}$

נקבל: $a=-c$

נניח $a=1$ ונקבל: $c=-1$, $b=-4$ ואת המשוואה:

$\boxed{x-4y-z+d=0}$

בתחילת סעיף א' מצאנו כי הנקודה $(-1,0,0)$ נמצאת על המישור π_3.

נציב את הנקודה בשתי המשוואות ונמצא את d.

א. $-1+d=0 \rightarrow d=1$

המשוואה היא: $\boxed{x+z+1=0}$

ב. $-1+d=0 \rightarrow d=1$

המשוואה היא: $\boxed{x-4y-z+1=0}$

ב. לפי הנתון ניתן לראות כי משוואת המישור המתאימה מבין השתיים שמצאנו בסעיף הקודם היא: $\boxed{x+z+1=0}$.
(המישור מקביל לציר y ולכן המקדם של y במשוואת המישור שווה ל-0).

כדי למצוא את הזווית שבין שני מישורים, נחשב את הזווית שבין וקטורי המקדמים שלהם (שהם האנכים למישור).
וקטור המקדמים של המישור $\pi_3: x+z+1=0$ הוא $(1,0,1)$.
וקטור המקדמים של המישור $\pi_2: 2x-2y+z+2=0$ הוא $(2,-2,1)$. נחשב את הזוית שבין המישורים:

$$\cos\alpha=\frac{|(1,0,1)(2,-2,1)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+1^1}}=\frac{2+1}{\sqrt{2}\sqrt{9}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\boxed{\alpha=45^\circ}$$

ג. לפי הנתון: $A(1,y_A,z_A)$ $C(-1,3,z_C)$ $B(x_B,y_B,z_B)$.

נמצא את שיעור x_B בעזרת הנוסחה לאמצע קטע: $\boxed{x_B=-3}\leftarrow \frac{x_B+1}{2}=-1$

הנקודה C נמצאת במישור π_3. נציב את שיעוריה במשוואת המישור:

$$x+z+1=0\rightarrow -1+z_C+1=0\rightarrow\boxed{z_C=0}$$

כעת אנו יודעים כי: $A(1,y_A,z_A)$, $C(-1,3,0)$, $B(-3,y_B,z_B)$.
כעת "ניפטר" מחלק מהמשתנים על ידי הצבת הנקודות A ו-B במשוואות המישורים עליהם הן נמצאות:

$$A\rightarrow\pi_1: x+2y+2z+1=0\rightarrow 1+2y_A+2z_A+1=0\rightarrow\boxed{z_A-1-y_A}$$

$$B\rightarrow\pi_2: 2x-2y+z+2=0\rightarrow -6-2y_B+z_B+2=0\rightarrow\boxed{z_B=4+2y_B}$$

נסכם: $A(1,y_A,-1-y_A)$, $C(-1,3,0)$, $B(-3,y_B,4+2y_B)$. מהנוסחה לאמצע קטע נקבל את שתי המשוואות:

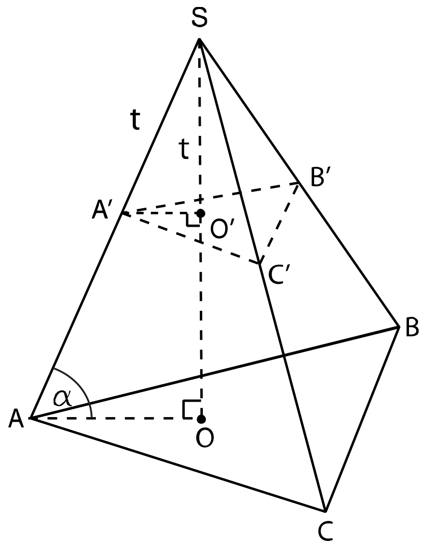
$$3=\frac{y_B+y_A}{2}\rightarrow y_B+y_A=6\rightarrow\boxed{y_A=6-y_B}$$

$$0=\frac{4+2y_B-1-y_A}{2}\rightarrow 3+2y_B-y_A=0\rightarrow\boxed{y_A=3+2y_B}$$

מפתרון מערכת המשוואות נקבל: $\boxed{y_B=1}$ ועל ידי הצבה: $\boxed{z_B=6}$. שיעורי הנקודה הם: $\boxed{B(-3,1,6)}$.

שאלה 3:

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**



א. נסמן : $\boxed{SA' = tSA}$. בהתאם לכך, עלינו למצוא את הערך של t.
הגובה לבסיס נופל במרכז המעגל החוסם את הבסיס (כשהבסיס משולש שווה צלעות, נקודה זו היא גם מפגש התיכונים). נסמן את מפגש התיכונים במשולש ΔABC כנקודה O. נסמן את מפגש התיכונים במשולש $\Delta A'B'C'$ כנקודה O' .

נתבונן במשולש ΔAOS. ניתן לראות כי הקטע $A'O'$ מקביל לקטע AO, ולכן מתקיים במשולש ΔAOS משפט תאלס.

כלומר $\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA}$, ומכאן נובע כי : $\boxed{SO' = tSO}$.

נתבונן במשולש ΔACS. ניתן לראות כי הקטע $A'C'$ מקביל לקטע AC, ולכן מתקיים גם במשולש ΔACS משפט תאלס.

כלומר $\frac{A'C'}{AC} = \frac{SA'}{SA}$, ולכן : $\boxed{A'C' = tAC}$.

לבסוף, ניתן לראות כי משולש $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ ולכן יחס השטחים שלהם שווה לריבוע יחס הדמיון :
$S_{\Delta A'B'C'} = t^2 S_{\Delta ABC}$ (1).

נתון כי הנפח הכלוא בין המישור $A'B'C'$ לבין הבסיס ABC, גדול פי שבעה מהנפח הכלוא בין המישור $A'B'C'$ לבין הקדקוד S. מכאן נובע כי נפח הפירמידה כולה, גדול פי שמונה מנפח הפירמידה הקטנה $SA'B'C'$.

נביע את נפחי שתי הפירמידות :

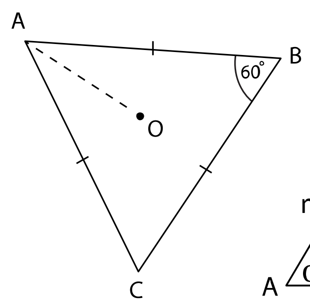
$$V_{SABC} = \frac{S_{ABC} \cdot SO}{3} \quad , \quad V_{SA'B'C'} = \frac{S_{A'B'C'} \cdot SO'}{3} \quad (2)$$

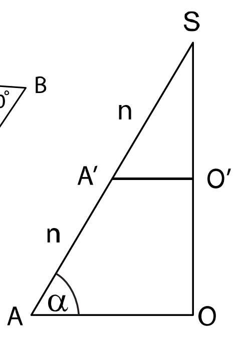
נציב בנפח הפירמידה הקטנה (2) את היחס שמצאנו קודם (1) ונקבל : $\frac{t^3 S_{ABC} \cdot SO}{3} = \frac{t^2 S_{ABC} \cdot tSO}{3}$

על פי הנתון $V_{SABC} = 8 \cdot V_{SA'B'C'}$. נפתח את המשוואה :

$$V_{SABC} = 8 \cdot V_{SA'B'C'} \rightarrow \frac{\cancel{S_{ABC}} \cdot \cancel{SO}}{\cancel{3}} = \frac{8 \cdot t^3 \cancel{S_{ABC}} \cdot \cancel{SO}}{\cancel{3}} \rightarrow 1 = 8t^3 \rightarrow t^3 = \frac{1}{8} \rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$$

מכאן נובע כי הנקודה A' מחלקת את המקצוע AS ביחס 1 : 1.





ב. נסמן $AS = 2n$. במשולש ישר הזווית ΔAOS נביע את אורך AO :

$$\cos\alpha = \frac{AO}{AS} = \frac{AO}{2n} \rightarrow \boxed{AO = 2n\cos\alpha} \quad (3)$$

במשולש ΔABC, AO הוא רדיוס המעגל החוסם.

באמצעות משפט הסינוסים במשולש ΔABC נביע את אורך AC :

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2AO \rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4n\cos\alpha \rightarrow \boxed{AC = 2\sqrt{3}n\cos\alpha} \quad (4)$$

כיוון שהבסיס ABC הוא משולש שווה צלעות, נקבל שגם : (5) $\boxed{BC = 2\sqrt{3}n\cos\alpha}$.

בנוסף, כיוון ש-$B'C'$ הוא קטע אמצעים במשולש ΔBCS, נקבל : $\boxed{B'C' = \frac{1}{2}BC}$ ולכן (6) $\boxed{B'C' = \sqrt{3}n\cos\alpha}$.

מהנתון לגבי שוויון ההיקפים ומ: 4, 5 ו-6 נקבל:

$$P_{\Delta ABC}=P_{BCC'B'}\ \to\ 3AC=BC+CC'+B'C'+B'B\ \to\ 6\sqrt{3}n\cos\alpha=2\sqrt{3}n\cos\alpha+\sqrt{3}n\cos\alpha+n+n/:n$$

$$6\sqrt{3}\cos\alpha=2\sqrt{3}\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha+2\ \to\ 3\sqrt{3}\cos\alpha=2\ \to\ \cos\alpha=\frac{2}{3\sqrt{3}}\ \to\ \boxed{\alpha=67.36^\circ}$$

ג. שטח הבסיס של הפירמידה הוא (ניעזר ב-4):

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AC^2\sin 60^\circ}{2}=\frac{\left(2\sqrt{3}n\cdot\cos 67.36^\circ\right)^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}n^2\cdot 0.148=0.77n^2$$

נחשב את גובה הפירמידה SO בתוך המשולש ישר הזווית ΔAOS:

$$\sin(67.36^\circ)=\frac{SO}{AS}\ \to\ 0.923=\frac{SO}{2n}\ \to\ SO=1.846n$$

נציב במשוואת נפח הפירמידה:

$$V_{SABC}=\frac{S_{ABC}\cdot SO}{3}=\frac{0.77n^2\cdot 1.846n}{3}=0.474n^3=62\ \to\ n^3=130.86\ \to\ \boxed{n=5.07}$$

נזכור כי לפי הסימון המקורי מתחילת התרגיל $AS=2n$, ולכן אורך המקצוע הצדדי הוא:

$AS=BS=2n=$ 10.15 ס"מ

שאלה 4:

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. הפונקציות הן: $f(x)=m\cdot\ln(a-x)$, $g(x)=\ln(a+x)$ ונתון ש: $1<m$, $3<a$.

שתי הפונקציות מוגדרות כאשר הביטוי שבתוך ה-ln גדול מ-0:

$f(x)\ \rightarrow\ a-x>0\ \rightarrow\ \boxed{x<a}$ מכאן שהאסימפטוטה האנכית היא בקצה תחום ההגדרה: $\boxed{x=a}$.

$g(x)\ \rightarrow\ a+x>0\ \rightarrow\ \boxed{x>-a}$ מכאן שהאסימפטוטה האנכית היא בקצה תחום ההגדרה: $\boxed{x=-a}$.

לשתי הפונקציות <u>אין</u> אסימפטוטות אופקיות.

ב. כדי למצוא את נקודת החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם ציר ה-y, נציב $x=0$:

$f(0)=m\cdot\ln a\ \rightarrow\ \boxed{(0,m\cdot\ln a)}$

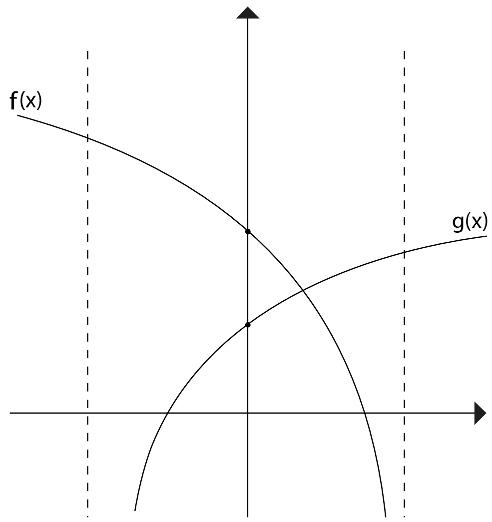
$g(0)=\ln a\ \rightarrow\ \boxed{(0,\ln a)}$

כדי למצוא את נקודת החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם ציר ה-x, נשווה את הפונקציות ל-0:

$f(x)=m.\ln(a-x)=0\ \rightarrow\ \ln(a-x)=0\ \rightarrow\ a-x=e^0\ \rightarrow\ x=a-1\ \rightarrow\ \boxed{(a-1,0)}$

$g(x)=\ln(a+x)=0\ \rightarrow\ a+x=e^0\ \rightarrow\ x=1-a\ \rightarrow\ \boxed{(1-a,0)}$

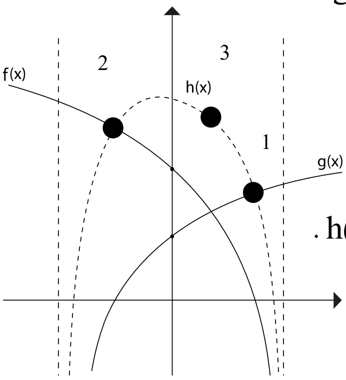
ג. כדי לקבוע היכן חותכים הגרפים את הצירים, הסתמכנו על הנתונים: $1<m$, $3<a$.



(בעמוד הבא מופיע פתרון מלא לסעיף ד')

ד. המשמעות של הטרנספורמציה: $h(x)=f(x)+g(x)$ היא שעבור כל x, ערכי ה-y של הפונקציה $h(x)$ הם הסכום של ערכי ה-y של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. עלינו לצייר סקיצה באופן כללי, ולכן נבחר שלוש נקודות "מפתח" בהן קל לנו להעריך איפה תעבור הפונקציה $h(x)$. נקודות אלו מודגשות בשרטוט. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מופיעים בשרטוט בקווים רציפים, והפונקציה החדשה $h(x)$ מופיעה במקווקו.

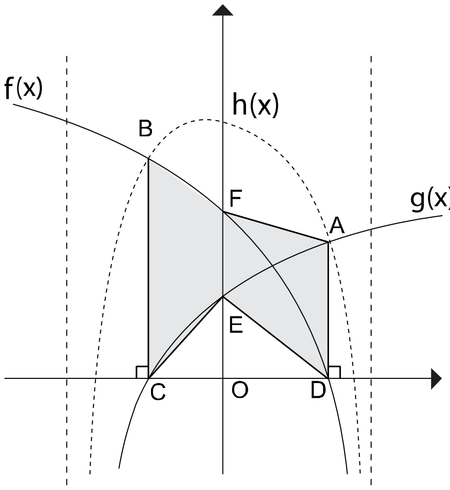
בנקודה (1), גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-x ולכן ערך ה-y של $f(x)$ שווה ל-0.
מכאן שערך ה-y של $h(x)$ בנקודה הזו שווה ל: $h(x)=0+g(x)=g(x)$.
כלומר, בנקודה (1) גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$.



באותו האופן, **בנקודה (2)**, גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x ולכן ערך ה-y של $g(x)$ שווה ל-0.
מכאן שערך ה-y של $h(x)$ בנקודה הזו שווה ל: $h(x)=f(x)+0=f(x)$.
כלומר, בנקודה (2) גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

בנקודה (3), לשני הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש את אותו ערך y,
מכאן שלפונקציה $h(x)$ בנקודה זו יש ערך y הגדול פי 2 מערך ה-y של נקודת חיתוך זו.
כעת נחבר את שלוש הנקודות הללו בקו ונקבל את הצורה הכללית של גרף הפונקציה $h(x)$.

הפונקציה $h(x)$ מורכבת מחיבור של $f(x)$ ו- $g(x)$ ולכן היא גם מוגדרת רק בתחום שבו שתי הפונקציות מוגדרות: $-a<x<a$, בין שתי האסימפטוטות האנכיות.



ה. נסמן את הנתונים בשרטוט:
נקודות C ו- D הן נקודות החיתוך של הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$ עם ציר ה-x,
ולכן שיעוריהן הם: $C(1-a,0)$ ו- $D(a-1,0)$.
הנקודה A היא נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$.
על סמך סעיף ד', ניתן לראות כי לנקודות A ו- D שיעור x זהה $(x=a-1)$.
על מנת למצוא את שיעור ה-y של הנקודה A, נציב $x=a-1$ ב- $g(x)$.

$$g(x)=\ln(a+x)\xrightarrow{x=a-1}y_A=\ln(a+a-1)\rightarrow y_A=\ln(2a-1)$$

כלומר, שיעורי הנקודה A הם: $A\left(a-1,\ln(2a-1)\right)$.
נחזור על תהליך זה פעם נוספת עבור הנקודה B ונגלה כי שיעוריה הם: $B\left(1-a,m\cdot\ln(2a-1)\right)$.
ניתן לראות כי $BC||FE||AD$, ולכן שני המרובעים BCEF ו- FEDA הם טרפזים. הגובה בטרפז BCEF הוא אורך הקטע OC. הנקודות O ו-C נמצאות על ציר ה-x, ולכן אורך הקטע OC הוא הפרש שיעורי ה-x של שתי הנקודות:

$$OC=x_O-x_C=0-(1-a)=a-1$$

באופן דומה ניתן לראות כי הגובה בטרפז FEDA הוא הקטע OD שאורכו הוא $a-1$. מכאן ש: $\boxed{OC=OD}$.

כדי למצוא את הערך של m, נביע את שטחי שני הטרפזים בעזרת m ונשווה ביניהם:

$$S_{BCEF}=\frac{(BC+FE)\cdot OC}{2}\quad,\quad S_{FEDA}=\frac{(AD+FE)\cdot OD}{2}$$

$$S_{BCEF}=S_{FEDA}\rightarrow\frac{(BC+FE)\cancel{\cdot OC}}{\cancel{2}}=\frac{(AD+FE)\cancel{\cdot OD}}{\cancel{2}}\rightarrow BC+FE=AD+FE\rightarrow\boxed{BC=AD}$$

$$BC=y_B=m\cdot\ln(2a-1)$$
$$AD=y_A=\ln(2a-1)$$
$$BC=AD\rightarrow m\cdot\cancel{\ln(2a-1)}=\cancel{\ln(2a-1)}\rightarrow\boxed{m=1}$$

כיוון ש: $3<a$ הרי שהביטוי $\ln(2a-1)$ חיובי וניתן לצמצמו מהאגפים. קיבלנו ערך m שסותר את הנתון $1<m$.

שאלה 5 * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. שתי הפונקציות $f(x)=\sqrt{\frac{a\cdot e^x}{e^x+e^2}}$ ו- $g(x)=\sqrt{\frac{e^x+e^2}{e^x}}$ מוגדרות כאשר הביטוי בתוך השורש חיובי. בשתי הפונקציות יש מנות של ביטויים מעריכיים, שהם חיוביים לכל x. לכן, תחום ההגדרה של שתי הפונקציות הוא כל x.

ב. נמצא תחילה את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$:

כאשר $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{e^x+e^2}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^2}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{e^2}{e^x}}=\sqrt{1+0^+}\approx 1\to\boxed{y=1}$$

כאשר $x\to-\infty$: אין אסימפטוטה:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{e^x+e^2}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^2}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{e^2}{e^x}}\approx\sqrt{1+\infty}\approx\infty$$

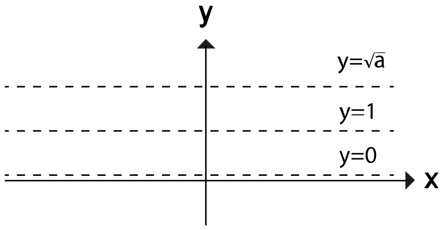
נמצא גם את שתי האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $f(x)$:

כאשר $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{a\cdot e^x}{e^x+e^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{a\cdot e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^2}{e^x}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{a}{1+\frac{e^2}{e^x}}}=\sqrt{\frac{a}{1+0^+}}\approx\sqrt{a}\to\boxed{y=\sqrt{a}}$$

כאשר $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{a\cdot e^{-\infty}}{e^{-\infty}+e^2}}\approx\sqrt{\frac{0^+}{e^2+0^+}}\approx 0\to\boxed{y=0}$$



לפי השרטוט ניתן לראות כי המרחק בין האסימפטוטה $y=0$ לבין $y=1$ הוא 1. המרחק בין $y=1$ לבין $y=\sqrt{a}$ הוא גם 1, ולכן חייב להתקיים: $y=\sqrt{a}=2$. מכאן ש: $\boxed{a=4}$.

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$ היא $\boxed{y=1}$. שתי האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $f(x)$ הן: $\boxed{y=0}$ ו: $\boxed{y=2}$.

ג. נקודת החיתוך של גרף $f(x)$ עם ציר ה-y היא: $f(0)=\sqrt{\frac{4\cdot e^0}{e^0+e^2}}=\sqrt{\frac{4}{1+e^2}}=0.69$. כלומר: $\boxed{(0,0.69)}$.

נקודת חיתוך עם ציר ה-x תהיה כאשר: $f(x)=\sqrt{\frac{4\cdot e^x}{e^x+e^2}}=0\ \to\ 4\cdot e^x=0$. מכיוון שביטוי מעריכי אינו מתאפס לעולם, אין נקודת חיתוך עם ציר ה-x.

נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-y היא: $g(0)=\sqrt{\frac{e^0+e^2}{e^0}}=\sqrt{1+e^2}=2.89$. כלומר: $\boxed{(0,2.89)}$.

בדיקה דומה לזו שעשינו עבור הפונקציה $f(x)$ תראה שגם כאן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-x.

ד. נשווה בין שתי הפונקציות:

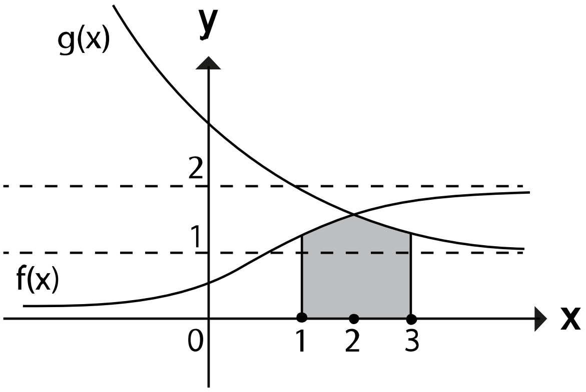
$$f(x)=g(x)\ \to\ \sqrt{\frac{4\cdot e^x}{e^x+e^2}}=\sqrt{\frac{e^x+e^2}{e^x}}\ \to\ \frac{4\cdot e^x}{e^x+e^2}=\frac{e^x+e^2}{e^x}\ \to\ 4e^{2x}=\left(e^x+e^2\right)^2\ \to\ 2e^x=\pm\left(e^x+e^2\right)$$

$$2e^x=e^x+e^2\ \to\ e^x=e^2\ \to\ \boxed{x=2}$$

$2e^x=-e^x-e^2\ \to\ 3e^x\neq -e^2$: למשוואה זו אין פתרון

נציב את $x=2$ באחת מהפונקציות ונקבל את שיעורי נקודת החיתוך: $\boxed{A\left(2,\sqrt{2}\right)}$.

ה. נתבונן בשרטוט. נפצל את השטח לשניים ב- $x=2$, ונביע כל אחד מנפחי גוף הסיבוב בנפרד.



את נפח גוף הסיבוב השמאלי V_1 נחשב באמצעות שיטת ההצבה:

$$V_1=\pi\cdot\int_1^2\left(\sqrt{\frac{4e^x}{e^x+e^2}}\right)^2dx=\pi\cdot\int_1^2\frac{4e^x}{e^x+e^2}dx$$

ראשית, נסמן: $u=e^x+e^2$.

נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל: $\frac{du}{dx}=e^x$. לבסוף נבודד את dx ונקבל: $\boxed{dx=\frac{du}{e^x}}$.

נחזור לאינטגרל לאחר הצבת u: $V_1=\int\frac{4e^x}{u}dx$ ונציב בו: $dx=\frac{du}{e^x}$:

$$V_1=\int\frac{4e^x}{u}dx\to\int\frac{4\cancel{e^x}}{u}\frac{du}{\cancel{e^x}}=\int\frac{4}{u}du$$

רק בשלב זה, לאחר סידור האינטגרל עבור u נבצע את האינטגרציה עצמה: $V_1=4\ln(u)$.

נציב בחזרה $u=e^x+e^2$ ונקבל את האינטגרל הסופי: $V_1=\pi\cdot4\ln(e^x+e^2)\Big|_1^2$. כלומר:

$$V_1=\pi\cdot4\ln(e^x+e^2)\Big|_1^2=\pi\cdot\left(4\ln(2e^2)-4\ln(e^1+e^2)\right)=\pi\cdot\left(4\ln(2e^2)-4\ln(e+e^2)\right)\to=\boxed{V_1=4.77}\ (\text{יח' נפח})$$

נביע את נפח גוף הסיבוב הימני V_2:

$$V_2=\pi\cdot\int_2^3\left(\sqrt{\frac{e^x+e^2}{e^x}}\right)^2dx\to\pi\cdot\int_2^3\left(\frac{e^x+e^2}{e^x}\right)dx\to\pi\cdot\int_2^3\left(1+\frac{e^2}{e^x}\right)dx\to\pi\cdot\int_2^3\left(1+e^{2-x}\right)dx$$

$$V_2=\pi\cdot\left(x-e^{2-x}\right)\Big|_2^3=\pi\cdot\left(3-e^{-1}-2+e^0\right)=\pi\cdot\left(2-\frac{1}{e}\right)\to\boxed{V_2=5.13}\ (\text{יח' נפח})$$

כעת נביע את נפח גוף הסיבוב כולו:

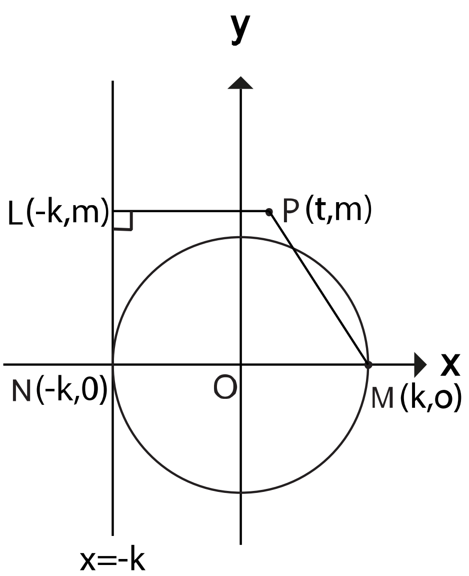
$$V_1+V_2=4.77+5.13\to V=\boxed{9.9\ \text{יחידות נפח}}$$

פתרון מלא - מבחן אתגר 3

שאלה 1

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

נציג שתי דרכים לפתרון:



דרך א' - זיהוי מקום גיאומטרי לפי הגדרה:

הנקודות M ו-N הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

נציב במשוואת המעגל $y=0$ ונקבל:

$$x^2+y^2=k^2 \rightarrow x^2=k^2 \rightarrow x=\pm k$$

נתון ששיעור ה-x של M חיובי ולכן: $M(k,0)$ ו- $N(-k,0)$.

הישר המשיק למעגל בנקודה N מאונך לרדיוס NO ולכן מקביל לציר ה-y. מכאן שמשוואתו היא: $x=-k$.

כעת נבחין שהתיאור של המקום הגיאומטרי המבוקש מתלכד עם הגדרת הפרבולה:

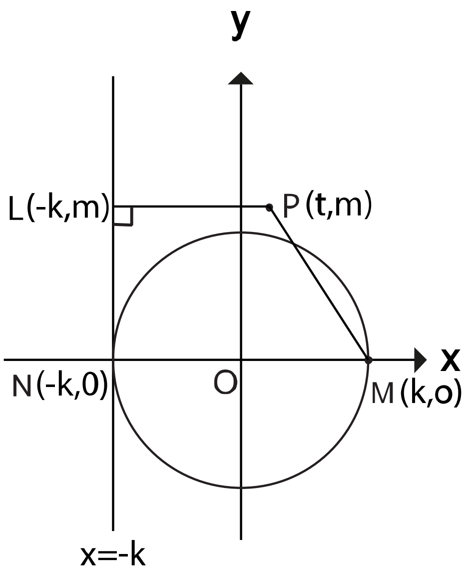
אנו מחפשים את אוסף כל הנקודות שמרחקן מהנקודה M שעל ציר ה-x **(מוקד הפרבולה)** שווה למרחקן מהישר המקביל לציר ה-y המשיק למעגל בנקודה N **(מדריך הפרבולה)**.

כמו כן, כיוון ששיעור ה-x של המוקד $x_M=k$ הוא המספר הנגדי לשיעור ה-x של הנקודות על המדריך $x=-k$ נסיק שזו פרבולה קנונית ולכן נוכל לחשב את קבוע הפרבולה p:

$$\frac{p}{2}=k \Rightarrow p=2k$$

מכאן שמשוואת הפרבולה היא:

$$y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 2kx \Rightarrow \boxed{y^2=4kx}$$



<u>דרך ב' - מציאת מקום גיאומטרי כללי:</u>

נפעל לפי השלבים הבאים:

1. נסמן את הנקודה המבוקשת כ: $P(t,m)$.
2. נביע את שאר הנתונים באמצעות הפרמטרים t ו-m.
3. נמצא משוואה המקשרת בין **כל** הנתונים בשאלה וזוהי משוואת המקום הגיאומטרי באמצעות הפרמטרים t ו-m.
4. לאחר סידור המשוואה נחליף בחזרה את הפרמטרים t ו-m בפרמטרים x ו-y בהתאמה.

הנקודות M ו-N הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

נציב במשוואת המעגל $y=0$ ונקבל:

$$x^2+y^2=k^2 \rightarrow x^2=k^2 \rightarrow x=\pm k$$

כלומר, שיעורי נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x הם: $M(k,0)$ ו- $N(-k,0)$.

הישר המשיק למעגל בנקודה N מאונך לרדיוס NO ולכן מקביל לציר ה-y. מכאן, שמשוואתו היא: $x=-k$.

נתון כי הישרים MP ו-PL שווים באורכם. נבטא את אורך PM:

$$d_{PM}=\sqrt{(t-k)^2+(m-0)^2}$$

המרחק בין הנקודה P לישר $x=-k$, הוא ההפרש שבין שיעורי ה-x של הנקודות $P(t,m)$ ו- $L(-k,m)$ (שרטוט):

$$d_{PL}=t-(-k)=t+k$$

נשווה בין שני האורכים:

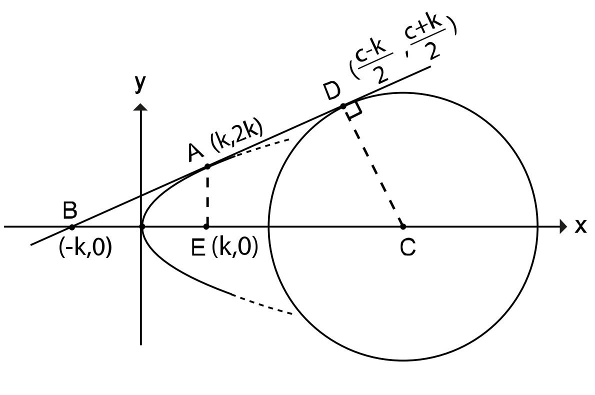
$$d_{PM}=d_{PL} \rightarrow \sqrt{(t-k)^2+(m-0)^2}=t+k \rightarrow (t-k)^2+(m-0)^2=(t+k)^2$$

$$\rightarrow \cancel{t^2}-2kt+\cancel{k^2}+m^2=\cancel{t^2}+2kt+\cancel{k^2} \rightarrow -2kt+m^2=2kt \rightarrow m^2=4kt$$

כעת, כשהגענו למשוואה המקשרת בין t ו- m, נחליף את האותיות ל-x ו-y בהתאמה, ונקבל: $\boxed{y^2=4kx}$.

קיבלנו משוואת פרבולה, ששיעורי המוקד שלה הם: $(k,0)$.

ב. נתבונן בשרטוט.



הפרבולה הנתונה היא $y^2=4kx$. משוואת הפרבולה הכללית היא $y^2=2px$, ולכן בשאלתנו $p=2k$.

הנקודה D היא נקודת החיתוך של המשיק לפרבולה בנקודה A ושל הישר CD.

נמצא תחילה את משוואת המשיק:

הנקודה E היא מוקד הפרבולה $y^2=4kx$, ולכן שיעור ה-x שלה שווה ל: $x_E=\frac{p}{2}=\frac{2k}{2}=k$. כלומר: $E(k,0)$.

שיעורי ה-x של הנקודות A ו-E זהים. נציב $x=k$ במשוואת הפרבולה ונקבל את שיעור ה-y של הנקודה A:

$y^2=4k\cdot k \rightarrow y=\sqrt{4k^2} \rightarrow y=2k$. כלומר, שיעורי הנקודה A הם: $A(k,2k)$.

נמצא את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה A, על פי הנוסחה: $y\cdot y_0=p(x+x_0)$:

$$y\cdot 2k=2k(x+k) \rightarrow \boxed{y=x+k}$$

המשיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה, ולכן הישרים CD ו- AD מאונכים זה לזה. מכאן ששיפועו של הרדיוס CD הוא 1-. נמצא את משוואת CD העובר בנקודה $C(c,0)$ ושיפועו 1-, בעזרת נוסחת הקו הישר:

$$y-0=-1(x-c) \rightarrow \boxed{y=-x+c}$$

נשווה את משוואות שני הישרים ונמצא את שיעורי הנקודה D:

$$x+k=-x+c \rightarrow 2x=c-k \rightarrow x_D=\frac{c-k}{2}$$

ולאחר הצבה באחת המשוואות נקבל כי שיעורי הנקודה הם: $\boxed{D\left(\frac{c-k}{2},\frac{c+k}{2}\right)}$.

ג. לפי הנתון, $BD=3AD$, ומכאן שהנקודה A מחלקת את הקטע BD ביחס של 2:1. ניעזר בנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון:

$$\frac{x_B+2\cdot x_D}{3}=x_A \rightarrow \frac{-k+c-k}{3}=k \rightarrow -2k+c=3k \rightarrow c=5k$$

לסיכום: שיעור הנקודה C הם: $\boxed{C(5k,0)}$.

ד. נסכם את שיעורי קדקודי המרובע ADCE: $C(5k,0)$, $D(2k,3k)$, $A(k,2k)$ ו- $E(k,0)$.

המרובע ADCE מורכב מהמשולש ΔACD ומהמשולש ΔACE. נביע בנפרד את שטחי שני המשולשים:

$S_{\Delta ACD}=\frac{AD\cdot CD}{2}$: נמצא תחילה את אורכי ניצבי המשולש:

$$d_{AD}=\sqrt{(2k-k)^2+(3k-2k)^2} \rightarrow d_{AD}=\sqrt{2}k$$

$$d_{CD}=\sqrt{(5k-2k)^2+(0-3k)^2} \rightarrow d_{CD}\sqrt{18}k$$

לסיכום, שטח המשולש ΔACD הוא:

$$S_{\Delta ACD}=\frac{AD\cdot CD}{2} \rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{\sqrt{2}k\cdot\sqrt{18}k}{2} \rightarrow \boxed{S_{\Delta ACD}=3k^2}$$

אורך הצלע AE הוא שיעור ה- y של הנקודה A, ואורך EC הוא הפרש שיעורי ה-x של הנקודות C ו-E. נביע את שטח המשולש ΔACE:

$$S_{\Delta ACE}=\frac{AE\cdot EC}{2}\rightarrow\frac{2k\cdot 4k}{2}=4k^2$$

לבסוף נביע את שטח המרובע ADCE:

$$S_{ADCE}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ACE}=3k^2+4k^2=28 \rightarrow k^2=4 \rightarrow k\pm 2$$

כיוון שנתון $0<k$, הרי שהפתרון היחיד הוא: $\boxed{k=2}$.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של הישר BD שמשוואתו $y=x+2$ עם ציר ה-x. נציב $y=0$ ונקבל כי $x_B=-2$.

מכאן שבפרבולה שמוקדה בנקודה B, $\frac{p}{2}=-2$.

כלומר, משוואת הפרבולה שמוקדה בנקודה B היא: $\boxed{y^2=-8x}$ $y^2=2px \rightarrow$.

שאלה 2

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. תחילה נפתור את שתי המשוואות בעזרת נוסחת השורשים:

$$Z^2-2\cos\alpha\cdot Z+1=0$$

$$Z_{1,2}=\frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos^2\alpha-4}}{2}=\frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4(\cos^2\alpha-1)}}{2}=\frac{2\cos\alpha\pm2\sqrt{\cos^2\alpha-1}}{2}=\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1}$$

ניעזר בזהות הבסיס: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ולאחר העברת אגפים: $\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$.

$$Z_{1,2}=\cos\alpha\pm\sqrt{-\sin^2\alpha}\ \rightarrow\ Z_{1,2}=\cos\alpha\pm i\sqrt{\sin^2\alpha}\ \rightarrow\ Z_{1,2}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$$

כלומר, פתרונות המשוואה במישור גאוס הם: $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ו- $B(\cos\alpha,-\sin\alpha)$.

באופן דומה נמצא את פתרונות המשוואה: $Z^2-\sin\alpha\cdot Z+1=0$:

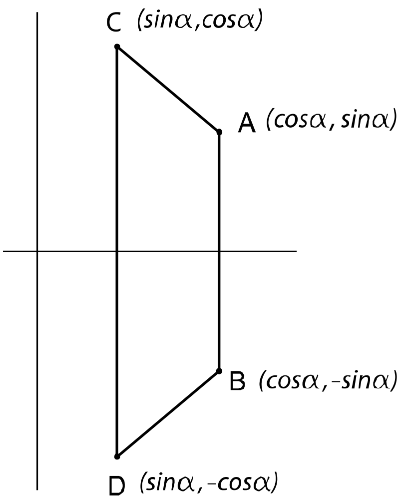
$$Z_{1,2}=\frac{\sin\alpha\pm\sqrt{4\sin^2\alpha-4}}{2}\rightarrow Z_{1,2}=\sin\alpha\pm i\cos\alpha$$

כלומר, פתרונות המשוואה במישור גאוס הם: $C(\sin\alpha,\cos\alpha)$ ו- $D(\sin\alpha,-\cos\alpha)$.

כל הפתרונות יימצאו על מעגל קנוני אחד במידה ולארבעתם יש ערך r זהה.

נזכור כי: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ונקבל כי הרדיוס של הנקודה A, למשל, הוא: $r_A=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$

בדיקה של שלושת הפתרונות האחרים באותו האופן מעלה כי בכולם $r=1$. מכאן שכל ארבעת הפתרונות נמצאים על אותו מעגל קנוני: מעגל היחידה.



ב. נמקם את הפתרונות במישור גאוס ונקבל כי המרובע ABDC הוא טרפז שווה שוקיים שבסיסיו מקבילים לציר ה-y.

אורך הבסיס AB הוא ההפרש בערכי ה-y של הנקודות A ו-B:

$$AB=\sin\alpha-(-\sin\alpha)\ \rightarrow\ AB=\sin\alpha+\sin\alpha\ \rightarrow\ \boxed{AB=2\sin\alpha}$$

אורך הבסיס CD הוא ההפרש בערכי ה-y של הנקודות C ו-D:

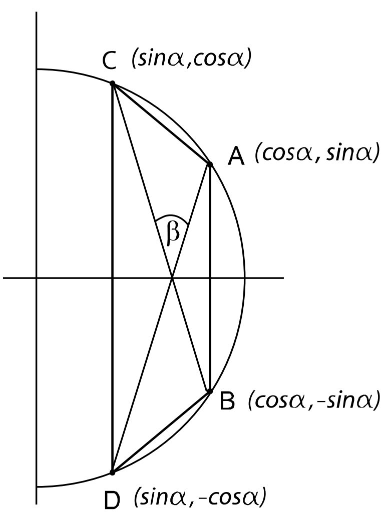
$$CD=\cos\alpha-(-\cos\alpha)\ \rightarrow\ CD=\cos\alpha+\cos\alpha\ \rightarrow\ \boxed{CD=2\cos\alpha}$$

גובה הטרפז הוא ההפרש בערכי ה-x של הנקודות A ו-C. נסמן אותו ב-h ונקבל: $\boxed{h=\cos\alpha-\sin\alpha}$

כעת נציב ונחשב את שטח הטרפז:

$$S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)\cdot h}{2}=\frac{\cancel{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cancel{2}}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

הביטוי שקיבלנו הוא למעשה $\cos2\alpha$ ונוכל לסכם כי: $\boxed{S_{ABCD}=\cos2\alpha}$.



ג. על סמך הסעיפים הקודמים נוכל לסמן את הנקודות בשרטוט כך:

הטרפז הוא שווה שוקיים ולכן שני אלכסוני הטרפז שווים זה לזה.

נמצא את אורך אלכסון הטרפז AD:

$$AD=\sqrt{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}\ \rightarrow$$

$$AD=\sqrt{\cos^2a-\cancel{2\cos\alpha\sin\alpha}+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cancel{2\cos\alpha\sin\alpha}+\sin^2\alpha}\ \rightarrow$$

$$AD=\sqrt{2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}\ \rightarrow\ \boxed{AD=\sqrt{2}}$$

ניעזר בנוסחה לחישוב שטח מרובע על פי שני אלכסוניו והזווית שביניהם ונקבל:

$$S_{ABCD}=\frac{AD\cdot CB\cdot\sin\beta}{2}\rightarrow S_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\beta}{2}\rightarrow S_{ABCD}=\sin\beta$$

נשווה את השטח לזה שמצאנו בסעיף ב' ונקבל:

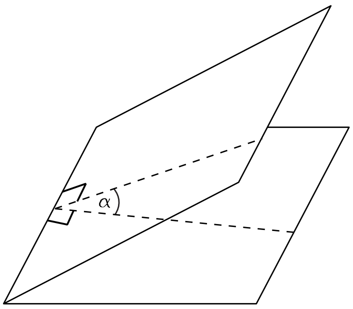
$$\sin\beta=\cos2\alpha\ \rightarrow\ \sin\beta=\sin(90^\circ-2\alpha)\ \rightarrow\ \boxed{\beta=90^\circ-2\alpha}$$

או

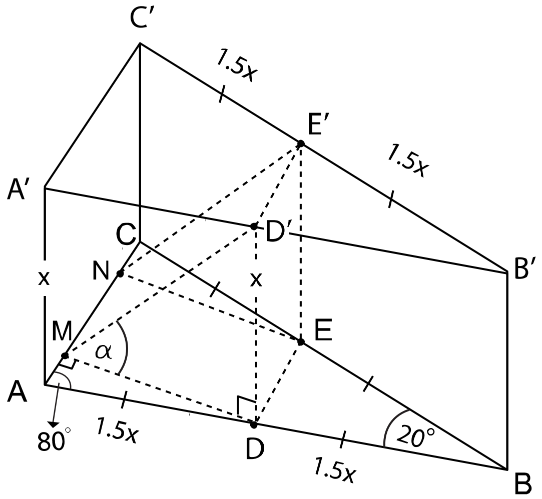
$$\beta=180^\circ-(90^\circ-2\alpha)\ \rightarrow\ \boxed{\beta=90^\circ+2\alpha}$$

שאלה 3

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**



א. נסמן בשרטוט $AA' = x$, ולכן: $AB = 3x$. זווית הראש במשולש שווה השוקיים ΔABC שווה ל- $20°$, ולכן זוויות הבסיס של המשולש שוות ל- $80°$. סעיף א' עוסק במציאת זווית בין שני המישורים $ACE'D'$ ו- ABC. כדי למצוא זווית בין שני מישורים, נוריד בכל אחד מהמישורים אנך לישר החיתוך של המישורים, ונמצא את הזווית שבין שני האנכים, כמתואר בשרטוט:



נשתמש בבניות עזר:

נוריד את DD' אל אמצע הקטע AB. ניתן לראות כי המרובע $ADD'A'$ הוא מלבן ולכן: $\boxed{AA' = DD' = x}$.

ישר החיתוך שבין שני המישורים $ACE'D'$ ו- ABC הוא המקצוע AC. בכל אחד משני המישורים $ACE'D'$ ו-ABC נוריד אנך לישר החיתוך.

במישור ABC, האנך לישר החיתוך הוא DM.

במישור ACE'D', האנך לישר החיתוך הוא $D'M$.

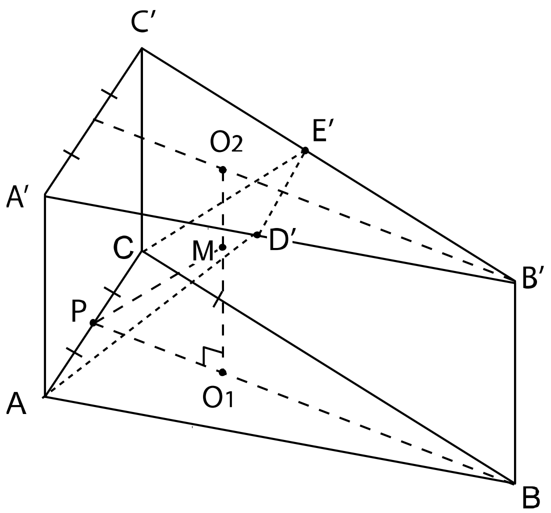
האנכים DM ו- $D'M$ נפגשים בנקודה M משיקולי סימטריה: המרובעים $MNED$, $DEE'D'$ ו- $E'NMD'$ הם מלבנים ולכן $DE = D'E' = MN$.

נמצא את אורכו של MD במשולש ישר הזווית ΔAMD:

$$\frac{MD}{1.5x} = \sin 80° \rightarrow \boxed{MD = 1.47x}$$

כעת נמצא את הזווית שבין שני המישורים, כזווית שבין הישרים MD' ו-MD במשולש ישר הזווית $\Delta DD'M$:

$$\tan\alpha = \frac{DD'}{MD} \rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{1.47x} \Rightarrow \tan\alpha = 0.67 \rightarrow \boxed{\alpha = 34.09°}$$



ב. תחילה נמצא את אורכו של BP במשולש ישר הזווית ΔBPA:

$$\frac{BP}{3x} = \sin 80° \rightarrow BP = 2.95x$$

נזכור כי O_1 הוא מפגש התיכונים ולכן $PO_1 = \frac{1}{3}BP$, ולאחר הצבה: $PO_1 = 0.98x$.

את אורכו של MO_1 נמצא במשולש ישר הזווית ΔMO_1P:

$$\frac{MO_1}{PO_1} = \tan 34.09° \rightarrow \frac{MO_1}{0.98x} = \tan 34.09° \rightarrow MO_1 = \frac{2}{3}x$$

נשים לב כי O_1O_2 הוא גובה במנסרה ולכן אורכו x.

קל לראות כי:

$$MO_2 = O_1O_2 - MO_1 \rightarrow MO_2 = x - \frac{2}{3}x \rightarrow MO_2 = \frac{1}{3}x$$

ולבסוף: $\boxed{\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{1}{3}x} = 2}$.

שאלה 4

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. (1) הפונקציה $f(x)=\log_a\left[(x-a-1)^2+a^2\right]$ מוגדרת כאשר הביטוי שבתוך ה-log חיובי.
מכיוון שהביטוי $(x-a-1)^2+a^2$ הוא חיבור של שני ביטויים חיוביים ו- $1<a$, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.
הפונקציה $g(x)=2a^{x-1}-a^{2x-2}+a+1$ היא חיבור של ביטויים מעריכיים המוגדרים לכל x ולכן ניתן לקבוע כי גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

(2) מכיוון ששתי הפונקציות מוגדרות לכל x, אין לפונקציות אסימפטוטות אנכיות.

למציאת אסימפטוטות אופקיות נבדוק מה קורה כאשר x שואף לאינסוף ולמינוס אינסוף.

בפונקציה $f(x)$:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\log_a\left[(\infty-a-1)^2+a^2\right]\approx\log_a(\infty)\approx\infty$ ← הפונקציה שואפת לאינסוף ולכן אין אסימפטוטה אופקית בתחום החיובי.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\log_a\left[(-\infty-a-1)^2+a^2\right]\approx\log_a(\infty)\approx\infty$ ← הפונקציה שואפת לאינסוף ולכן אין אסימפטוטה אופקית בתחום השלילי. לסיכום, לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות אופקיות.

בפונקציה $g(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=2a^{\infty-1}-a^{2\infty-2}+a+1\approx 2a^{\infty}-a^{2\infty}+a+1\approx-\infty$$

כלומר, הפונקציה שואפת למינוס אינסוף ולכן בתחום $0<x$ אין אסימפטוטה אופקית.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=2a^{-\infty-1}-a^{-2\infty-2}+a+1\approx 2a^{-\infty}-a^{-2\infty}+a+1\approx\frac{2}{a^{\infty}}-\frac{1}{a^{2\infty}}+a+1\approx 0-0+a+1=a+1$$

כלומר, הפונקציה שואפת ל: $a+1$ ולכן בתחום $x<0$ האסימפטוטה האופקית היא: $\boxed{y=a+1}$.

(3) כדי למצוא את נקודות הקיצון נגזור את שתי הפונקציות ונשווה את הנגזרת ל-0. נגזור את הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{2(x-a-1)}{(x-a-1)^2+a^2}=0\ \to\ x-a-1=0\ \to\ x=a+1$$

נציב את x בפונקציה המקורית ונמצא את ערך y של הנקודה:

$$f(a+1)=\log_a\left[(a+1-a-1)^2+a^2\right]=\log_a\left(a^2\right)=2$$

כדי לגלות את סוגה של נקודת הקיצון $B(a+1,2)$ נציב את ערך ה-x של הנקודה בנגזרת השנייה ונבדוק את סימנה.
מספיק לגזור את המונה של הנגזרת הראשונה: $f''(x)=2$.
הנגזרת השנייה חיובית ומכאן שזוהי נקודת מינימום. לסיכום קיבלנו את הנקודה $\boxed{B(a+1,2)\min}$.

נגזור את הפונקציה $g(x)$:

$$g'(x)=2a^{x-1}\ln a-a^{2x-2}\cdot 2\ln a=0\ \to\ 2\ln a(a^{x-1}-a^{2x-2})=0\ \to\ a^{x-1}=a^{2x-2}\ \to\ x-1=2x-2\ \to\ x=1$$

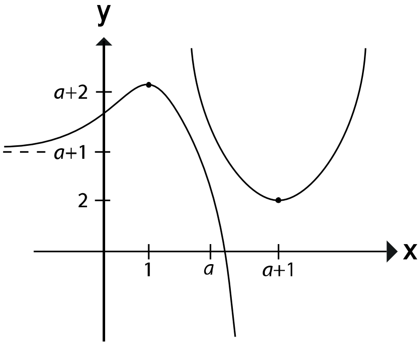
נציב את x בפונקציה המקורית ונמצא את ערך y של הנקודה:

$$g(1)=2a^0-a^0+a+1=2-1+a+1=a+2$$

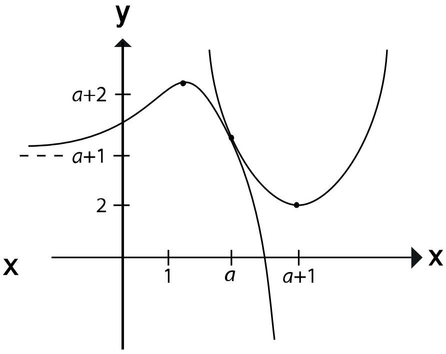
כדי לגלות את סוגה של נקודת הקיצון $(1,a+2)$ נציב את ערך ה-x של הנקודה בנגזרת השנייה ונבדוק את סימנה.
מספיק לגזור את הביטוי $a^{x-1}-a^{2x-2}$ שבנגזרת הראשונה, מכיוון שהביטוי $2\ln a$ חיובי לכל x ואינו משפיע על סימנה של הנגזרת השנייה. $g''(x)=a^{x-1}\ln a-a^{2x-2}\cdot 2\ln a$ (נגזרת מקוצרת - סימן).
נציב את $x=1$ ונבדוק את הסימן: $g''(1)=a^0\ln a-a^0\cdot 2\ln a=-\ln a$
הנגזרת השנייה שלילית ומכאן שזוהי נקודת מקסימום. לסיכום קיבלנו את הנקודה: $\boxed{A(1,a+2)\max}$.

ב. אין צורך להשוות את הפונקציות כדי לגלות כמה נקודות חיתוך יש. נוכל להסתמך על החקירה שעשינו עד כה. באופן כללי ניתן לשרטט את שתי הפונקציות בשלושה אופנים, כך שיתקיימו התנאים שמצאנו:

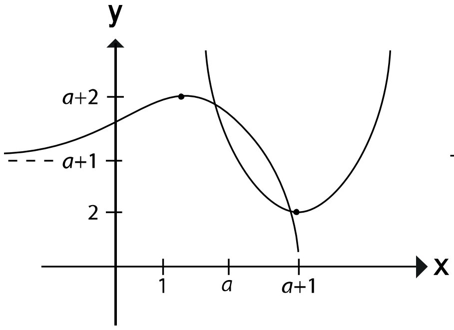
במצב זה אין נקודות חיתוך



במצב זה יש נקודת חיתוך אחת



במצב זה יש שתי נקודות חיתוך.



כלומר, יתכנו לכל היותר שני פתרונות למשוואה הנתונה.

ג. תחילה נמצא את משוואת הישר AB. נמצא את שיפוע הישר באמצעות הנוסחה לשיפוע דרך שתי נקודות:

$$m_{AB}=\frac{2-(a+2)}{a+1-1}\ \rightarrow\ m_{AB}=\frac{-a}{a}\ \rightarrow\ m_{AB}=-1$$

משוואת הישר ששיפועו 1- העובר דרך הנקודה $A(1,a+2)$ היא:

$$y-(a+2)=-1(x-1)\ \rightarrow\ y=-x+1+a+2\ \rightarrow\ \boxed{y=-x+a+3}$$

הנקודה C היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-x. נציב במשוואת הישר $y=0$:

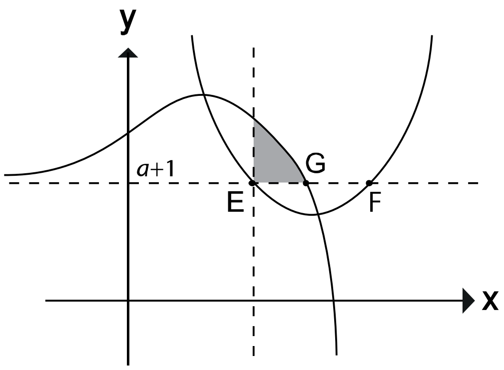
$$0=-x+a+3\ \rightarrow\ x_C=a+3\ \rightarrow\ \boxed{C(a+3,0)}$$

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הישר עם האסימפטוטה $y=a+1$. נציב במשוואת הישר $y=a+1$:

$$a+1=-x+a+3\ \rightarrow\ x_D=2\ \rightarrow\ \boxed{D(2,a+1)}$$

הנקודה D מחלקת את הקטע AC ביחס של 3:1. ניעזר בנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון:

$$x_D=\frac{3x_A+x_C}{3+1}\ \rightarrow\ 2=\frac{3\cdot1+a+3}{4}\ \rightarrow\ a+6=8\ \rightarrow\ \boxed{a=2}$$



ד. נתבונן בשרטוט במקרה בו הפונקציות נחתכות בשתי נקודות שונות. נמצא תחילה את שיעורי הנקודות E ו-F, נקודות החיתוך של האסימפטוטה $y=3$ והפונקציה $f(x)$:

$$3=\log_2\left[(x-3)^2+4\right]\ \rightarrow\ 2^3=(x-3)^2+4\ \rightarrow\ x^2-6x+5=0$$

פתרונות המשוואה הם $x=1$ ו-$x=5$.

נתון כי: $x_E<x_F$ ולכן שיעורי הנקודה E הם: $\boxed{E(1,3)}$.

G היא נקודת החיתוך של האסימפטוטה $y=3$ והפונקציה $g(x)$:

$$3=2\cdot2^{x-1}-2^{2x-2}+3\ \rightarrow\ 2\cdot2^{x-1}-2^{2x-2}=0\ \rightarrow\ 2^x-2^{2x-2}=0\ \rightarrow\ 2^x=2^{2x-2}\ \rightarrow\ x=2x-2\ \rightarrow\ x=2$$

כלומר, שיעורי הנקודה G הם: $\boxed{G(2,3)}$.

נבצע את האינטגרל למציאת השטח:

$$S=\int_1^2\left(2\cdot2^{x-1}-2^{2x-2}+3-3\right)dx\ \rightarrow\ S=\int_1^2\left(2^x-2^{2x-2}\right)dx\ =\ \frac{2^x}{\ln2}-\frac{2^{2x-2}}{2\ln2}\Bigg|_1^2\ \rightarrow$$

$$S=\frac{2^2}{\ln2}-\frac{2^{2\cdot2-2}}{2\ln2}-\left(\frac{2^1}{\ln2}-\frac{2^{2-2}}{2\ln2}\right)\ \rightarrow\ S=\frac{4}{\ln2}-\frac{4}{2\ln2}-\frac{2}{\ln2}+\frac{1}{2\ln2}\ \rightarrow\ s=\cancel{\frac{4}{\ln2}}-\cancel{\frac{2}{\ln2}}-\cancel{\frac{2}{\ln2}}+\frac{1}{2\ln2}\ \rightarrow$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2\ln2}=0.721}\ \text{(יח"ר)}$$

שאלה 5

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. הפונקציה $f(x)=\frac{50x+1}{\sqrt[3]{50x^2+2x+12}}$ מוגדרת כאשר הביטוי בתוך השורש במכנה גדול מ-0.

$$50x^2+2x+12>0 \;\rightarrow\; x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 50\cdot 12}}{100}$$

הביטוי בתוך השורש שלילי ולכן אין פתרונות. המקדם של x^2 חיובי, ולכן הביטוי $50x^2+2x+12$ מייצג פרבולה "מרחפת" מעל ציר ה-x בצורת $\smile$. כלומר, הביטוי $50x^2+2x+12$ חיובי לכל x, ולכן הפונקציה מוגדרת לכל x.

ב. בכדי להראות שגרף הפונקציה עולה לכל x, נגזור את הפונקציה, אך לפני כן, נסדר את המכנה בתצוגה של חזקה:

$$f(x)=\frac{50x+1}{\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{(50x+1)'\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}\right)'\cdot(50x+1)}{\left(\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{50\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(50x+1)\cdot(100x+2)}{\left(\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}=$$

$$f'(x)=\frac{50\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{2(50x+1)^2}{3\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{2}{3}}}=$$

$$f'(x)=\frac{150\cdot\left(50x^2+2x+12\right)-2(50x+1)^2}{3\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{2500x^2+100x+1798}{3\cdot\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{4}{3}}}$$

הביטוי במכנה הוא כאמור חיובי.

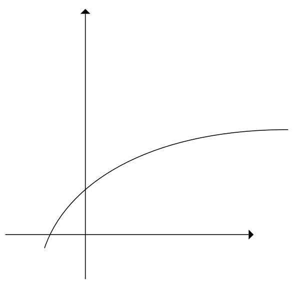
הביטוי $2500x^2+100x+1798$ במונה הוא פרבולה שאינה מתאפסת. אם ננסה להשוות אותה ל-0, נמצא שאין לה פתרונות. במונה, המקדם של x^2 הוא חיובי, ולכן המונה מייצג פרבולה מרחפת מעל ציר ה-x בצורת $\smile$. כלומר, המונה חיובי לכל x. לסיכום, נגזרת הפונקציה חיובית לכל x ולכן הפונקציה עולה לכל x.

ג. נקודת החיתוך עם ציר ה-y: $x=0 \rightarrow f(0)=\frac{1}{\sqrt[3]{12}}=0.43 \rightarrow \boxed{(0,0.43)}$

נקודת החיתוך עם ציר ה-x: $y=0 \rightarrow \frac{50x+1}{\sqrt[3]{50x^2+2x+12}}=0 \rightarrow 50x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{50} \rightarrow \boxed{(-0.02,0)}$

ד. הפונקציה עולה לכל x ועוברת דרך שתי נקודות החיתוך עם הצירים.

לכן, השרטוט הוא:



ה. נתבונן בשרטוט. ראשית נעביר את שני האנכים $x=1$ ו- $x=2$.

כדי להעלות על השרטוט את הישר $y=-px+2p$ נמצא את נקודות החיתוך של הישר עם הצירים:

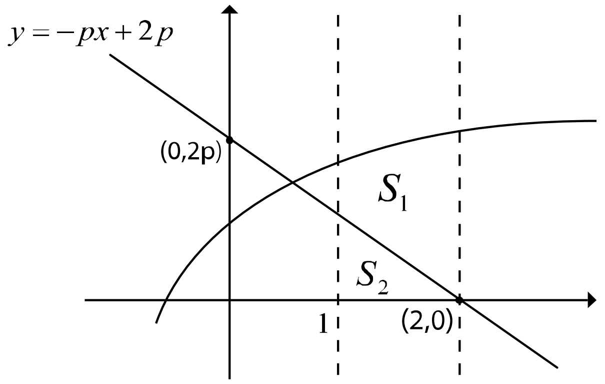
נציב $x=0$ ונקבל: $y=2p$.

כלומר, החיתוך עם ציר ה-y בנקודה: (0,2p) .

נציב $y=0$ ונקבל: $x=2$.

כלומר, החיתוך עם ציר ה-x בנקודה: (2,0) .

בהתאם לנתון $p>0$ ניתן לסמן את שתי נקודות החיתוך בשרטוט, ולהעביר דרכן את הישר $y=-px+2p$.



כעת, נביע באמצעות p את שני השטחים S_1 ו- S_2 ונשווה ביניהם. חישוב השטח S_2 קל יותר:

$$S_2=\int_1^2(-px+2p)dx \rightarrow S_2=-\frac{px^2}{2}+2px\Big|_1^2 \rightarrow S_2=-2p+4p-\left(-\frac{p}{2}+2p\right) \rightarrow \boxed{S_2=\frac{p}{2}}$$

כדי לחשב את השטח S_1, נוח יותר לחשב את שני השטחים יחד (השטח שמתחת לגרף הפונקציה), ולחסר ממנו את S_2 שכבר מצאנו: $S_1+S_2=\int_1^2\left(\frac{50x+1}{\sqrt[3]{50x^2+2x+12}}\right)dx$

כדי לחשב אינטגרל זה, נשתמש בשיטת ההצבה:

ראשית, נסמן: $u=50x^2+2x+12$. נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל: $\frac{du}{dx}=100x+2$.

לבסוף נבודד את dx ונקבל: $\boxed{dx=\frac{du}{2(50x+1)}}$.

נחזור לאינטגרל לאחר הצבת u: $\int\frac{50x+1}{\sqrt[3]{u}}dx$ ונציב בו: $dx=\frac{du}{2(50x+1)}$:

$$\int\frac{50x+1}{\sqrt[3]{u}}dx \rightarrow \int\frac{\cancel{50x+1}}{\sqrt[3]{u}}\cdot\frac{du}{2(\cancel{50x+1})} \rightarrow \int\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{u}}du \rightarrow \int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{u}}du \rightarrow \int\frac{1}{2}\cdot u^{-\frac{1}{3}}du$$

רק בשלב זה, לאחר סידור האינטגרל עבור u נבצע את האינטגרציה עצמה: $\int\frac{1}{2}\cdot u^{-\frac{1}{3}}du \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{3}{4}u^{\frac{2}{3}}$

נציב $u=50x^2+2x+12$ ונקבל את האינטגרל הסופי של $\frac{50x+1}{\sqrt[3]{50x^2+2x+12}}$ והוא: $\boxed{\frac{3}{4}\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{2}{3}}}$.

כעת נחזור ונבצע את האינטגרל של S_1+S_2 במלואו:

$$S_1+S_2=\int_1^2\frac{50x+1}{\sqrt[3]{50x^2+2x+12}}dx \rightarrow S_1=\frac{3}{4}\left(50x^2+2x+12\right)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2=\frac{3}{4}(200+4+12)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}(50+2+12)^{\frac{2}{3}}=15$$

כלומר, אם השטח המשותף S_1+S_2 שווה ל-15, והרי שמצאנו קודם ש: $\boxed{S_2=\frac{p}{2}}$, הרי שנקבל: $\boxed{S_1=15-\frac{p}{2}}$.

נשווה את שני השטחים ונמצא את ערכו של הפרמטר p: $\boxed{p=15} \leftarrow 15-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$.