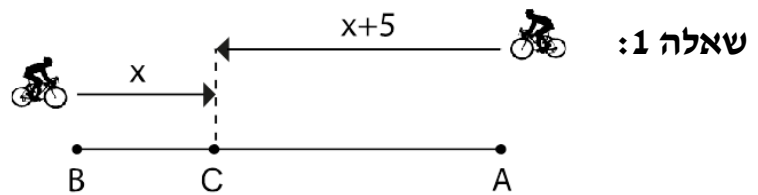


פתרון מלא - מבחן 6

דרך	זמן	מהירות	עד הפגישה
$x+5$	y	$\frac{x+5}{y}$	הרוכב שיצא מ-A
x	y	$\frac{x}{y}$	הרוכב שיצא מ-B

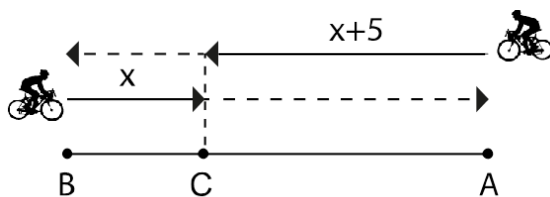
א. לפי הנתון, הרוכב שיצא מ-A עבר עד הפגישה 5 ק"מ יותר מחברו, ולכן נסמן את הקטע BC בתור x ואת הקטע AC בתור $x+5$. כמו כן, נסמן את הזמן שחלף עד הפגישה באמצעות y . תחילה נמלא את עמודות הדרך והזמן. את המהירות נבטא באמצעות חלוקת הדרך בזמן.

דרך	זמן	מהירות	מהפגישה ועד ליעד
$\frac{x+5}{y} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$	$\frac{x+5}{y}$	הרוכב שיצא מ-A
$\frac{x}{y} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{x}{y}$	הרוכב שיצא מ-B

נמלא את הנתונים הנוספים בתרגיל, בתוך הטבלה:

נשים לב להמיר את הזמנים הנתונים מדקות לשעות. נעשה זאת על ידי חלוקה ב-60.

נמלא תחילה את עמודות המהירות והזמן. את עמודות הדרך נבטא באמצעות הכפלת המהירות בזמן.



נתבונן בשרטוט המצורף. ניתן לראות כי הדרך אותה נותר לרוכב הראשון לעבור **לאחר** הפגישה שווה לדרך אותה עבר הרוכב השני לפני הפגישה, ולהיפך. מכאן נקבל שתי משוואות:

$$\begin{cases} \frac{x+5}{y} \cdot \frac{4}{5} = x \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{5}{4} = x+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(x+5) = 5xy \\ 5x = 4y(x+5) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{4(x+5)}{5x} \\ y = \frac{5x}{4(x+5)} \end{cases} \rightarrow \frac{4(x+5)}{5x} = \frac{5x}{4(x+5)} \rightarrow 16(x^2 + 10x + 25) = 25x^2$$

$$\rightarrow 0 = 9x^2 - 160x - 400 \rightarrow x_1 = -\frac{40}{9}, \quad x_2 = 20$$

הפתרון היחיד התקף הוא $x=20$, מאחר שהמרחק חייב להיות ערך חיובי.

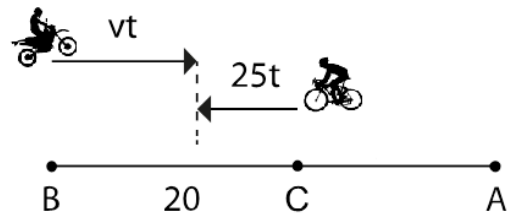
לאחר הצבת $x=20$ במשוואה השנייה, נקבל כי: $y=1$.

כלומר, מהירות הרוכב הראשון היא: $\frac{x+5}{y} = \frac{20+5}{1} = 25$ קמ"ש.

ומהירות השני היא: $\frac{x}{y} = \frac{20}{1} = 20$ קמ"ש. המרחק AB הוא: $x+x+5 = 20+20+5 = 45$ ק"מ.

ב. נמלא בטבלה את הנתונים המתייחסים לפגישה של האופנוען עם הרוכב שיצא מ-A :

דרך	זמן	מהירות	עד הפגישה עם הרוכב הראשון
vt	t	v	האופנוען
$\frac{x+5}{y} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$	$\frac{x+5}{y}$	הרוכב שיצא מ-A



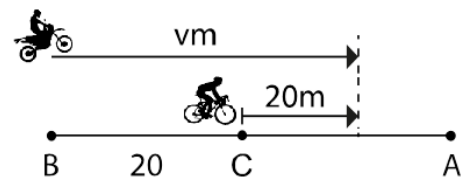
נסמן את זמן הנסיעה של האופנוען והרוכב שיצא מ-A בפרמטר t (החל מרגע יציאתו של האופנוען לדרך). האופנוען והרוכב שיצא מ-A, נוסעים האחד לקראת השני וכשיפגשו יעברו ביחד את הקטע BC, כלומר: 20

ק"מ. ומכאן המשוואה: $vt + 25t = 20 \rightarrow t(v + 25) = 20 \rightarrow t = \frac{20}{v + 25}$

נציב את t בביטוי המתאר את הדרך שעבר האופנוען עד הפגישה (vt) ונקבל את הדרך אותה עבר: $\frac{20v}{v + 25}$

כעת נמלא בטבלה את הנתונים המתייחסים לפגישה של האופנוען עם הרוכב שיצא מ-B :

דרך	זמן	מהירות	עד הפגישה עם הרוכב השני
vm	m	v	האופנוען
$20m$	m	20	הרוכב שיצא מ-B



נסמן את זמן הנסיעה של האופנוען והרוכב שיצא

מ-B בפרמטר m (החל מרגע יציאתו של האופנוען לדרך).

האופנוען והרוכב נוסעים באותו הכיוון. הדרך אותה עבר האופנוען עד הפגישה, ארוכה ב-20 ק"מ מהדרך שעבר הרוכב. נשווה בין הדרכים אותם עברו השניים, לאחר שנוסיף 20 לאגף המשוואה המתאר את דרכו של הרוכב:

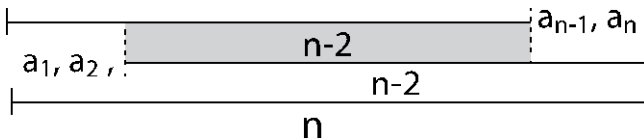
$$vm = 20m + 20 \rightarrow m(v - 20) = 20 \rightarrow m = \frac{20}{v - 20}$$

נציב את m בביטוי של הדרך שעבר האופנוען עד הפגישה (vm) ונקבל כי הדרך אותה עבר היא: $\frac{20v}{v - 20}$

את המרחק אותו עבר האופנוען בין הפגישות עם שני הרוכבים נחשב כהפרש קטעים: המרחק הוא ההפרש בין הדרך שעשה האופנוען עד לפגישה השנייה, לבין הדרך שעשה עד הפגישה הראשונה:

$$d = \frac{20v}{v - 20} - \frac{20v}{v + 25} \rightarrow \frac{20v(v + 25) - 20v(v - 20)}{(v - 20)(v + 25)} \rightarrow \frac{20v^2 + 500v - 20v^2 + 400v}{(v - 20)(v + 25)} \rightarrow d = \frac{900v}{(v - 20)(v + 25)}$$

שאלה 2



א. ניעזר בשרטוט כדי להרכיב שתי משוואות יעילות: ניעזר בחיסור קטעים ונראה כי סכום $n-2$ האיברים הראשונים הוא למעשה סכום

כל n איברי הסדרה למעט שני האיברים האחרונים: $S_{\text{FIRST}} = S_n - (a_{n-1} + a_n)$.

באופן דומה, נראה כי סכום $n-2$ האיברים האחרונים הוא למעשה: $S_{\text{LAST}} = S_n - (a_1 + a_2)$.

לפי הנתון, סכום $n-2$ האיברים הראשונים קטן ב-200 מסכום $n-2$ האיברים האחרונים ולכן:

$$S_{\text{LAST}} = S_{\text{FIRST}} + 200 \rightarrow S_n - (a_1 + a_2) = S_n - (a_{n-1} + a_n) + 200 \rightarrow (a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2) = 200$$

כלומר, ההפרש בין שני הסכומים S_{LAST} ו- S_{FIRST} , הוא למעשה ההפרש בין שני האיברים האחרונים בסדרה לבין שני האיברים הראשונים. נמשיך ונפתח את המשוואה:

$$a_1 + d(n-2) + a_1 + d(n-1) - a_1 - a_1 - d = 200 \rightarrow 2dn - 4d = 200 \rightarrow \text{(I)} \quad d = \frac{100}{n-2}$$

סכום 3 האיברים הראשונים הוא: $a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d \rightarrow 3a_1 + 3d$
סכום 3 האחרונים הוא:

$$a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \rightarrow a_1 + d(n-3) + a_1 + d(n-2) + a_1 + d(n-1) \rightarrow 3a_1 + 3dn - 6d$$

לפי הנתון הנוסף, סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה קטן ב-240 מסכום שלושת האיברים

$$3a_1 + 3d + 240 = 3a_1 + 3dn - 6d \rightarrow 3dn - 9d = 240 \rightarrow \text{(II)} \quad d = \frac{80}{n-3}$$

$$\frac{100}{n-2} = \frac{80}{n-3} \rightarrow 100n - 300 = 80n - 160 \rightarrow 20n = 140 \rightarrow \boxed{n=7}$$

נשווה בין המשוואות I ו-II ונקבל:

ב. נציב $n=7$ באחת ממשוואות I ו-II ונמצא כי $d=20$.

האיבר הראשון בסדרת האיברים הזוגיים הוא a_2 והפרש הסדרה הוא $2d$. מכאן שהנוסחה לסכום הסדרה

$$\hat{S} = \frac{n}{2}(2a_2 + 2d(n-1)) \rightarrow \hat{S} = \frac{n}{2}(2(a_1 + 20) + 40(n-1)) \rightarrow \boxed{\hat{S} = \frac{n}{2}(2a_1 + 40n)}$$

האיבר הראשון בסדרת האיברים המתחלקים ב-3 ללא שארית הוא a_3 והפרשה הוא $3d$. נוסחת סכום

$$S = \frac{n}{2}(2a_3 + 3d(n-1)) \rightarrow S = \frac{n}{2}(2(a_1 + 40) + 60(n-1)) \rightarrow \boxed{S = \frac{n}{2}(2a_1 + 20 + 60n)}$$

נבדוק האם יתכן אי השוויון $\hat{S} > S$ (נזכור כי $0 < n$):

$$\frac{n}{2}(2a_1 + 40n) > \frac{n}{2}(2a_1 + 20 + 60n) \rightarrow 2a_1 + 40n > 2a_1 + 20 + 60n \rightarrow -20n > 20 \rightarrow \boxed{n < -1}$$

n הוא מספר טבעי ולכן אי השוויון לא יתכן לאף n . נשאלנו לגבי k , אך הבדיקה נעשתה באמצעות n .

זאת, כדי לקבוע האם קיים $n=k$ כלשהו שעבורו התכונה הנדרשת מתקיימת או לא מתקיימת.

שאלה 3:

סך הכל	בנות ($\bar{A}$)	בנים (A)	
			דתיים (B)
			חילוניים ($\bar{B}$)
1			סך הכל

א. השאלה מחלקת אוכלוסייה שלמה (המצטרפים למכינה קדם צבאית) לפי שני מאפיינים (דת ומין) ולכן נבחר לפתור אותה בעזרת טבלה:

שאלה זו, כמו שאלות הסתברות רבות, משלבת גם את נוסחת ברנולי למטרת מילוי הטבלה: נתון כי מבחירה אקראית של ארבעה תלמידים ($n=4$) מתוך כלל הנרשמים ההסתברות לבחור ארבעה דתיים ($k=4$) היא 0.0016. כלומר, אם p היא ההסתברות להיות דתי מקרב כלל הנרשמים, נקבל את

$$\binom{4}{4} \cdot p^4 (1-p)^0 = 0.0016 \rightarrow p^4 = 0.0016 \rightarrow \boxed{p=0.2}$$

המשוואה הבאה:

כלומר, שיעור הדתיים מקרב הנרשמים למכינה הוא 0.2 ולכן שיעור החילוניים (המשלים) הוא 0.8. באופן דומה, נתון כי מבחירה אקראית של שלושה שמות ($n=3$), ההסתברות ששלושתם ($k=3$) יהיו של בנות היא 0.216. כלומר, אם q היא ההסתברות להיות בת מקרב כלל הנרשמים, נקבל את המשוואה הבאה:

$$\binom{3}{3} \cdot q^3 (1-q)^0 = 0.216 \rightarrow q^3 = 0.216 \rightarrow \boxed{q=0.6}$$

כלומר, שיעור הבנות מקרב הנרשמים למכינה הוא 0.6 ולכן שיעור הבנים (המשלים) הוא 0.4.

סך הכל	בנות ($\bar{A}$)	בנים (A)	
0.2	$0.2-x$	x	דתיים (B)
0.8			חילוניים ($\bar{B}$)
1	0.6	0.4	סך הכל

כעת נותר נתון אחרון שבו טרם השתמשנו: ההסתברות לבחור נרשם דתי, בהינתן שנבחר בן, נמוכה פי שניים מההסתברות לבחור נרשמת בת, בהינתן שנבחר נרשם דתי. בשני חלקי המשפט מופיע הביטוי "בהינתן ש", אשר מרמז על הסתברות מותנית. ראשית, נתייחס לכל אחד מחלקי המשפט בנפרד:

(1) ההסתברות לבחור נרשם דתי בהינתן שנבחר בן: $P(B/A)$. הסתברות זו מותנית ולכן מחושבת על ידי

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ההסתברות למאורע המסוים (בן דתי), לחלק בהסתברות לתנאי הנתון (שנבחר בן). כלומר,

(2) ההסתברות לבחור נרשמת בת, בהינתן שנבחר נרשם דתי: $P(\bar{A}/B)$. גם הסתברות זו מותנית ולכן

$$\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

תחושב על ידי חילוק המאורע המסוים (בת דתייה) בתנאי הנתון (שנבחר נרשם דתי). כלומר,

$$2 \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

נתון כי ההסתברות הראשונה נמוכה פי שניים להסתברות השנייה ולכן:

$$P(\bar{A} \cap B) = 0.2 - x \quad \text{לכן} \quad P(A \cap B) = x$$

כדי להקל על הכתיבה נגדיר

נציב את כל הנתונים במשוואה ונקבל:

$$2 \cdot \frac{x}{0.4} = \frac{0.2-x}{0.2} \rightarrow 0.4x = 0.08 - 0.4x \rightarrow 0.8x = 0.08 \rightarrow \boxed{x=0.1}$$

כעת נוכל למלא את הטבלה:

סך הכל	בנות ($\bar{A}$)	בנים (A)	
0.2	0.1	0.1	דתיים (B)
0.8	0.5	0.3	חילוניים ($\bar{B}$)
1	0.6	0.4	סך הכל

אם כן, ההסתברות לבחור מבין כלל הנרשמים בת דתייה היא $\boxed{0.1}$.

ב. בשנה שעברה היו 300 בנות חילוניות ברשימה. שיעור הבנות החילוניות מתוך כלל הנרשמים הוא 50%, כלומר סך כל הנרשמים למכינה היו 600. מהטבלה נתון כי הבנים מהווים 40% מכלל הנרשמים, לכן:

$$\frac{40}{100} \cdot 600 = \boxed{240}$$

ג. בסעיף זה עלינו לחשב את ההסתברות שמתוך חמישה תלמידים נבחרים יהיו גם בנים וגם בנות. לכאורה, יש לחבר הסתברויות רבות לכל השילובים האפשריים (4 בנים ובת אחת, שלושה בנים ושתי בנות וכו'). אולם, דרך קלה יותר היא לחשב רק את ההסתברות לתרחישים שלא עומדים בתנאי ולחסר אותה מ-1 (למצוא את המשלים). קיימים רק שני תרחישים שלא עומדים בתנאי והם שכל חמשת התלמידים יהיו בנים, או שכולן בנות.

ההסתברות שמתוך חמישה תלמידים נבחרים (n=5) כולם (k=5) יהיו בנים (p=0.4):

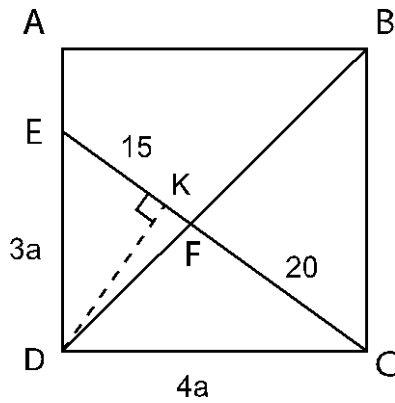
$$\binom{5}{5} \cdot 0.4^5 (0.6)^0 = 0.01024$$

ההסתברות שמתוך חמישה תלמידים נבחרים (n=5) כולם (k=5) יהיו בנות (p=0.6):

$$\binom{5}{5} \cdot 0.6^5 (0.4)^0 = 0.07776$$

לכן, ההסתברות שמתוך חמשת הנבחרים יהיו גם בנים וגם בנות היא: $\boxed{0.912} = 1 - (0.01024 + 0.07776)$.

שאלה 4



א. כדי לחשב את שטח משולש $\triangle CDE$ עלינו למצוא את אורכי הצלעות ED ו-DC:

(1) $\angle ADC$ חוצה זווית BD אלכסון בריבוע חוצה את זוויותיו

(2) יחס הצלעות במשולש $\triangle CDE$ לפי משפט חוצה זווית
נתון: $EF = 15$ ס"מ, $CF = 20$ ס"מ.

$$\frac{DE}{DC} = \frac{EF}{CF} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

הצבה לפי יחס הצלעות שמצאנו ב-(2).
(3) $DE = 3a$, $CD = 4a$

פיתגורס במשולש ישר זווית.
זוויות הריבוע שוות 90° .
(4) $\triangle CDE: ED^2 + DC^2 = 35^2$
 $9a^2 + 16a^2 = 1225$
 $a = 7$ ס"מ

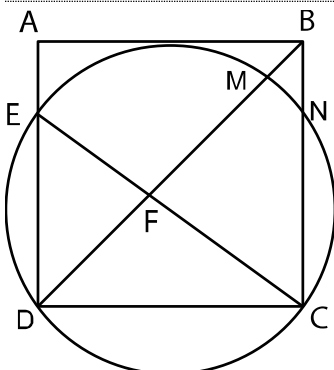
(5) $DE = 21$ ס"מ, $CD = 28$ ס"מ

(6) $S_{\triangle CDE} = \frac{21 \cdot 28}{2} = \boxed{294 \text{ סמ"ר}}$
מש"ל א'1 מתוך (5).

כדי לחשב את שטח המשולש $\triangle DEF$, עלינו למצוא גובה במשולש. נסמן DK, גובה לצלע EC.
חשוב לשים לב שגובה זה הוא גובה במשולש $\triangle DEF$ וגם גובה במשולש $\triangle EDC$.

(7) חישוב נוסף של שטח $\triangle CDE$.
 $S_{\triangle CDE} = \frac{KD \cdot 35}{2} = 294 \rightarrow KD = 16.8$

(8) $S_{\triangle DEF} = \frac{KD \cdot EF}{2} = \frac{16.8 \cdot 15}{2} = \boxed{26 \text{ סמ"ר}}$
מש"ל א'2



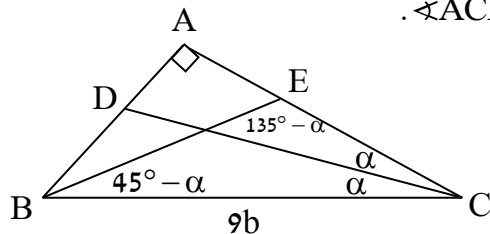
ב. בסעיף זה אנו מתבקשים לקבוע האם המיתר DM קצר, ארוך, או שווה לאורכו של קוטר המעגל. מן הנקודה D, כמו מכל נקודה על המעגל, יוצא רק קוטר אחד.

(9)	$\angle NCD = 90^\circ$	זווית היקפית במעגל	זוויות בריבוע שוות ל- 90° .
	$\Downarrow$		
(10)	$CE = DN$	קוטר במעגל	זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
	$\Downarrow$		
(11)	DM אינו שווה לקוטר ובהכרח קצר ממנו.	הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל.	
	$\boxed{MD < CE}$	מש"ל ב'	
	ג. C, D, E ו-N הן נקודות על המעגל, כלומר המרובע ENCD חסום במעגל.		
	$\angle NED + \angle NCD = 180^\circ$		
(12)	$\angle ENC + \angle EDC = 180^\circ$	במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות שווה ל- 180° .	
(13)	$\angle NCD = \angle EDC = 90^\circ$	זוויות בריבוע ABCD.	
	$\Downarrow$		
(14)	$\angle NED = \angle ENC = 90^\circ$	מתוך (12) ו-(13).	
	$\Downarrow$		
(15)	ENCD מלבן.	מרובע שכל זוויותיו שוות ל- 90° הוא מלבן.	
	$\Downarrow$		
(16)	$\boxed{CD = EN}$	מש"ל ג'	צלעות נגדיות במלבן שוות זו לזו.
	ד. B היא נקודה מחוץ למעגל ממנה יוצאים שני חותכים למעגל.		
	$BM \cdot BD = BN \cdot BC$	אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.	
(17)			
(18)	$BC = AD$	צלעות נגדיות בריבוע ABCD	
(19)	$NC = ED$	צלעות נגדיות במלבן NCDE	
	$\Downarrow$		
(20)	$BC - NC = AD - ED \rightarrow BN = AE$	חיסור קטעים שווים	
(21)	$\boxed{BM \cdot BD = AE \cdot AD}$	מש"ל ד'	מתוך (17), (18) ו-(20).

שאלה 5:

א. נוכיח את הזהות: $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad / : \cos^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



ב. 1. נתון שהמשולש $\triangle ABC$ ישר זווית ובו $BC = 9b$, $\angle ACB = 2\alpha$.

כיוון ש-AC חוצה זווית נקבל ש: $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$.

כמו כן, בעזרת השלמה ל- 180° במשולש $\triangle ABC$ נקבל

ש: $\angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$ וכיוון ש-BE חוצה זווית

מתקיים: $\angle CBE = 45^\circ - \alpha$. לבסוף, בעזרת השלמה

ל- 180° במשולש $\triangle BCE$ נקבל ש: $\angle BEC = 135^\circ - \alpha$.

כעת נוכיח את הטענה המבוקשת. לפי משפט הסינוסים במשולש $\triangle BCE$ מתקיים:

$$\frac{CE}{\sin \angle CBE} = \frac{BC}{\sin \angle BEC} \rightarrow \frac{CE}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{9b}{\sin(135^\circ - \alpha)} \rightarrow CE = 9b \cdot \left(\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(135^\circ - \alpha)} \right)$$

נשתמש בזהות $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ ונקבל:

$$\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(135^\circ - \alpha)} = \frac{\sin 45^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 45^\circ}{\sin 135^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad : \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \text{ נשתמש בזהות } \cos \alpha \text{ ונביטוי } \cos \alpha \text{ בחלק נחלק את המונה והמכנה בביטוי } \cos \alpha$$

נשים לב שבהכרח $\cos \alpha \neq 0$ אחרת $\alpha = 90^\circ$ ובמשולש $\triangle BCE$ מתקיים: $\angle BCE = 180^\circ$.

$$CE = 9b \cdot \left(\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(135^\circ - \alpha)} \right) = 9b \cdot \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) \rightarrow CE = 9b \cdot \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) \quad \text{ולכן קיבלנו ש:}$$

2. נתון ש: $CE = b$. נשווה לביטוי שמצאנו בסעיף הקודם:

$$CE = 9b \cdot \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) \rightarrow b = 9b \cdot \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) \quad / : 9b \rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \rightarrow 1 + \tan \alpha = 9 - 9 \tan \alpha$$

$$\rightarrow 10 \tan \alpha = 8 \rightarrow \tan \alpha = 0.8$$

בסעיף א' הוכחנו את הזהות $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. נציב ונקבל:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow (0.8)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1.64 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{41} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$\alpha < 90^\circ$ אחרת במשולש $\triangle BCE$ מתקיים: $\angle BCE = 2\alpha > 180^\circ$. מכאן ש: $0 < \cos \alpha$ ולכן: $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$

ראינו ש: $\tan \alpha = 0.8$ ולכן בעזרת הצבה בזהות $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ נקבל ש:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{\sin \alpha}{\frac{5}{\sqrt{41}}} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

3. לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש מתקיים:

$$S_{\triangle BCE} = \frac{BC \cdot CE \cdot \sin \angle BCE}{2} = \frac{9b \cdot 9b \cdot \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) \cdot \sin 2\alpha}{2} \rightarrow S_{\triangle BCE} = \frac{81}{2} b^2 \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) \cdot \sin 2\alpha$$

נציב $\tan \alpha = 0.8$:

$$S_{\triangle BCE} = \frac{81}{2} b^2 \left(\frac{1 - 0.8}{1 + 0.8} \right) \cdot \sin 2\alpha \rightarrow S_{\triangle BCE} = \frac{81}{2} b^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \sin 2\alpha \rightarrow S_{\triangle BCE} = \frac{9}{2} b^2 \cdot \sin 2\alpha$$

כעת ניעזר בזהות: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ובתוצאות מסעיף 2 ונקבל:

$$S_{\triangle BCE} = \frac{9}{2} b^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow S_{\triangle BCE} = \frac{9}{2} b^2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} \rightarrow S_{\triangle BCE} = \frac{180b^2}{41}$$

4. נניח ששטח המשולש $\triangle ABE$ הוא $2.5b^2$. נסמן $AB = x$ ולכן, לפי משפט חוצה זווית במשולש

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE} \rightarrow \frac{x}{9b} = \frac{AE}{b} \rightarrow AE = \frac{x}{9}$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{AB \cdot AE}{2} = 2.5b^2 \rightarrow \frac{x \cdot \frac{x}{9}}{2} = 2.5b^2 \rightarrow x^2 = 45b^2 \rightarrow x = \sqrt{45}b$$

$$AC = AE + CE = \frac{\sqrt{45}}{9}b + b \approx 1.745b \text{ ובנוסף: } AE = \frac{\sqrt{45}}{9}b, AB = \sqrt{45}b$$

לכן, לפי משפט פיתגורס במשולש $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = 45b^2 + 3.05b^2 \rightarrow BC^2 = 48.046b^2 \rightarrow BC = 6.932b$$

אבל נתון $BC = 9b$ והגענו לסתירה. מכאן שההנחה שגויה ולא ייתכן ששטח המשולש $\triangle ABE$ הוא $2.5b^2$.

שאלה 6:

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$.

א. ניעזר בזהות $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ונראה שמתקיים:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \cos(-x) = x^2 \cdot \cos(-x) = x^2 \cdot \cos x = f(x)$$

מכאן שלכל x בתחום: $f(-x) = f(x)$ ולכן הפונקציה זוגית.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים:
ציר ה- y :

$$\boxed{(0,0)} \quad f(0) = 0^2 \cdot \cos 0 = 0 \rightarrow$$

ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 \cdot \cos x = 0 \quad / : x^2 \neq 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

כאשר הפתרונות בתחום $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ הם: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ ולכן נקודות החיתוך הן:

$$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$$

ג. מהתבוננות במעגל היחידה (הסבר בעמוד 133) ניתן לראות שבתחום $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ הביטוי $\cos x$ הוא

אי-שלילי. כיוון שהביטוי x^2 אי שלילי לכל x , ובפרט בתחום הנתון, פונקציית המכפלה $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ היא אי-שלילית לכל x בתחום זה.

ד. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = 2x \cdot \cos x + x^2(-\sin x) = x(2\cos x - x\sin x)$$

נשווה לאפס:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2\cos x - x\sin x) = 0$$

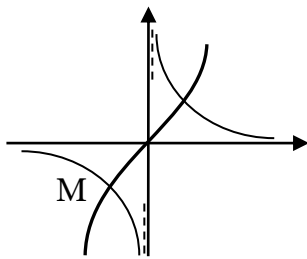
ולכן הפתרונות הם: $x = 0$ או:

$$2\cos x - x\sin x = 0 \rightarrow 2\cos x = x\sin x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{x} \rightarrow \tan x = \frac{2}{x}$$

ראינו שלכל פתרון המקיים $x \neq 0$ בהכרח מתקיים: $\tan x = \frac{2}{x}$. לכן, חלק מפתרונות המשוואה $f'(x) = 0$

מקיימים: $\tan x = \frac{2}{x}$.

ה. נתונים הגרפים של הפונקציות: $g(x) = \frac{2}{x}$ ו: $h(x) = \tan x$ בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$.



בסעיף ד' ראינו שכל פתרון $x \neq 0$ של המשוואה $f'(x) = 0$ מקיים בהכרח את

המשוואה $\tan x = \frac{2}{x}$. לפי השרטוט, הגרפים $\tan x$ ו- $\frac{2}{x}$ נחתכים ב-2 נקודות ולכן

למשוואה $\tan x = \frac{2}{x}$ קיימים 2 פתרונות.

מכאן שלמשוואה $f'(x) = 0$ יש 3 פתרונות: הפתרון $x = 0$ ו-2 הפתרונות

המקיימים $\tan x = \frac{2}{x}$ שעל קיומם ניתן להסיק בעזרת התבוננות בגרפים הנתונים.

1. ניתן למצוא את שיעור ה- x של הנקודה M בעזרת הצבת שיעור ה- y שלה באחת מהפונקציות אליהן היא שייכת. נציב ב- $g(x)$ ונקבל:

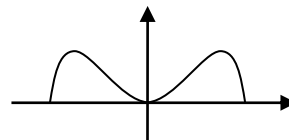
$$\frac{2}{x} = -1.858 \rightarrow x = -1.076$$

כמו כן, כיוון שהפונקציה $f(x)$ זוגית, גם הנקודה $x = 1.076$ חשודה בקיצון. לבסוף, ראינו שהנגזרת מתאפסת גם ב- $x = 0$ ולכן זו הנקודה החשודה השלישית. נציב את שלוש הנקודות בטבלת עלייה וירידה:

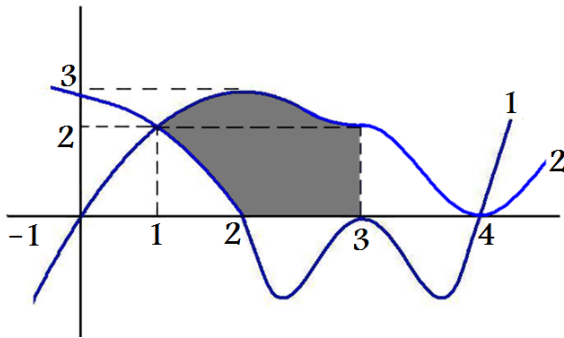
תחום x	$-\frac{\pi}{2} < x < -1.076$	$x = -1.076$	$1.076 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1.076$	$x = 1.076$	$1.076 < x < \frac{\pi}{2}$
סוג הנקודה	$x = -1.1$	קיצון	$x = -1$	קיצון	$x = 1$	קיצון	$x = 5$
סימן הנגזרת	חיובי	\\	שלילי	\\	חיובי	\\	שלילי
הפונקציה עולה/יורדת	↗	max	↘	min	↗	max	↘

ומכאן שכל הנקודות החשודות הן אכן נקודות קיצון ולכן, שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ הם: $x = -1.076$, $x = 0$, $x = 1.076$.

2. על סמך שיעורי ה- x של נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה שמצאנו, ניתן לשרטט בתחום הנתון את הסקיצה הבאה:



שאלה 7



א. בין הנגזרת $f'(x)$ והנגזרת $f''(x)$, מתקיים אותו הקשר שבין כל פונקציה לפונקציית הנגזרת שלה.

נזכיר את הכללים המרכזיים:

כאשר הפונקציה עולה, הנגזרת שלה חיובית.

כאשר הפונקציה יורדת, הנגזרת שלה שלילית.

נקודות המפתח הן נקודות הקיצון. כאשר לפונקציה

יש נקודת קיצון, הנגזרת מתאפסת. (כלומר, גרף הנגזרת חותך את ציר ה- x).

נחפש נקודות אלו בשרטוט המצורף ונמצא כי כאשר $x = 2$, לגרף 2 יש נקודת קיצון וגרף 1 חותך את ציר ה-

x . מכאן שגרף מספר 2 מייצג את $f'(x)$ וגרף מספר 1 מייצג את $f''(x)$.

ב. הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ כאשר $f''(x) < 0$. לכן הפתרון הוא תחומי החיוביות של $f''(x)$:

$$\text{או } -1 < x < 2 \mid 4 < x < 5$$

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ כאשר $f''(x) < 0$. לכן הפתרון הוא תחומי השליליות של $f''(x)$:

$$\text{או } 2 < x < 3 \mid 3 < x < 4$$

ג. כדי למצוא את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה $(1, 7)$, נמצא את ערך הנגזרת $f'(x)$ בנקודה $x = 1$.

לפי השרטוט נמצא כי ערך הנגזרת $f'(x)$ בנקודה $x = 1$ הוא 2. כלומר, שיפוע המשיק לגרף $f(x)$ כאשר

$x = 1$ הוא 2. נציב ערך זה ואת שיעורי הנקודה במשוואת הישר ונקבל: $y - 7 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 5$.

ד. לפי השרטוט, ערך הנגזרת $f'(x)$ בנקודה $x = 3$ הוא 2. כלומר, משוואת המשיק בנקודה $(3, 12)$

ששיפועו 2 היא: $y - 12 = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x + 6$.

ה. השטח המסומן הוא שטח מורכב ולכן נחשב אותו באמצעות חיסור שטחים. תחילה נחשב את כל השטח

התחום בין גרף $f'(x)$ לבין ציר ה- x בין $x = 1$ ו- $x = 3$. לאחר מכן נחסר ממנו את השטח הלבן התחום בין

גרף $f''(x)$ לבין ציר ה- x בין $x = 1$ ו- $x = 2$.

נזכור כי: $\int f''(x) dx = f'(x)$, וכן $\int f'(x) dx = f(x)$.

בנוסף, נזכור כי לפי הנתונים בסעיפים ג' ו-ד', אנו יודעים את ערכי הפונקציה $f(x)$ בנקודות 1 ו-3:

$$S = \int_1^3 f'(x) dx - \int_1^2 f''(x) dx = f(x) \Big|_1^3 - f'(x) \Big|_1^2 = (12 - 7) - (3 - 2) = \boxed{4 \text{ יח"ר}}$$

ו. 1. נמצא את תחום החיוביות של הפונקציה $g(x)$ באמצעות הטבלה הבאה:

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < 4$	$4 < x$
$f'(x)$	-	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	-	-	+
$f'(x) \cdot f''(x)$	-	+	-	-	+

בשתי השורות העליונות הסימן בכל תחום נקבע לפי השרטוט ואילו בשורה השלישית הסימן בכל אחד מהתחומים הוא תוצאה של מכפלת הסימנים שבשתי השורות שמעליו.

לכן תחום החיוביות של הפונקציה $g(x)$ הוא: $0 < x < 2$ או $4 < x$.

2. לפי סעיף ו' בתחום $0 \leq x \leq 2$ הפונקציה $g(x)$ היא אי-שלילית ולכן השטח המבוקש ניתן לחישוב באמצעות האינטגרל הבא:

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 f'(x) \cdot f''(x) dx$$

כדי לפתור את האינטגרל נשתמש בשיטת ההצבה:

נסמן: $u = f'(x)$ ונגזור את המשוואה:

$$\frac{du}{dx} = (f'(x))' \rightarrow \frac{du}{dx} = f''(x) \rightarrow du = f''(x) dx$$

כעת נציב באינטגרל ונקבל:

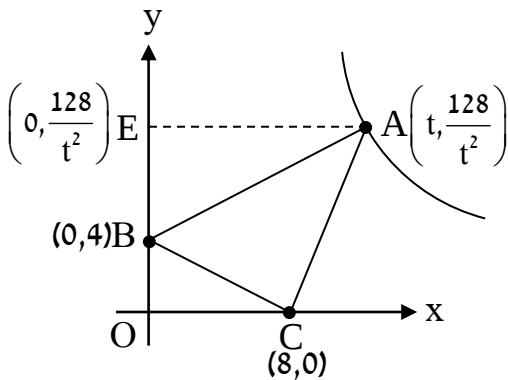
$$\int f'(x) \cdot f''(x) dx = \int u du = \frac{u^2}{2} \xrightarrow{u=f'(x)} = \frac{(f'(x))^2}{2}$$

ולכן מתקיים:

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 f'(x) \cdot f''(x) dx = \frac{(f'(x))^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{(f'(2))^2}{2} - \frac{(f'(0))^2}{2} = \left(\frac{3^2}{2} \right) - (0) = 4.5$$

כלומר השטח המבוקש הוא: 4.5 יח"ר.

שאלה 8



א. זוהי בעיית קיצון. ראשית, נביע את פונקציית המטרה המייצגת את שטח המשולש ΔABC . לאחר מכן, נגזור ונשווה את הנגזרת ל-0 בכדי למצוא את נקודת המקסימום. תחילה נמצא את פונקציית המטרה: קשה למצוא את שטח המשולש ישירות. במקום זאת, נמצא את שטח המשולש באמצעות חיסור שטחי המשולשים ΔAEB ו- ΔOBC משטח הטרפז $ACOE$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y = \frac{128}{x^2}$

ולכן נסמן אותה: $A\left(t, \frac{128}{t^2}\right)$. מהקדקוד A נוריד אנך לציר ה- y אשר חותך אותו בנקודה E .

$$S_{ACOE} = \frac{(AE + OC) \cdot OE}{2} = \frac{(t + 8) \cdot \frac{128}{t^2}}{2} = \frac{64t + 512}{t^2} \quad \text{נסמן: } E\left(0, \frac{128}{t^2}\right) \text{ נביע את שטח הטרפז:}$$

$$S_{\Delta AEB} = \frac{AE \cdot BE}{2} = \frac{t \cdot \left(\frac{128}{t^2} - 4\right)}{2} = \frac{64}{t} - 2t, \quad S_{\Delta OBC} = \frac{CO \cdot BO}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

נביע את שטחי המשולשים:

נביע את פונקציית המטרה המתארת את שטח המשולש ΔABC באמצעות חיסור שטחי המשולשים משטח

$$f(t) = \frac{64t + 512}{t^2} - 16 - \frac{64}{t} + 2t \rightarrow \frac{64}{t} + \frac{512}{t^2} - 16 - \frac{64}{t} + 2t \rightarrow \boxed{f(t) = \frac{512}{t^2} + 2t - 16} \quad \text{הטרפז:}$$

$$f'(t) = \frac{-1024}{t^3} + 2 = 0 \rightarrow \frac{-1024 + 2t^3}{t^3} = 0 \rightarrow t^3 - 512 = 0 \rightarrow \boxed{t = 8}$$

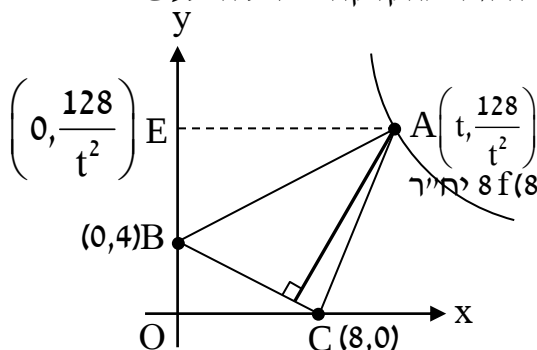
נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:

נגזור את מונה הנגזרת $f'(x)$ פעם נוספת ונציב את הפתרון $t = 8$ בכדי לוודא שהוא אכן מינימלי.

$$f''(8) = 6t^2 \rightarrow 6 \cdot 8^2 > 0 \rightarrow \min$$

כלומר, שיעורי הנקודה A עבורם שטח המשולש ΔABC מינימלי הם: $A(8, 2)$.

ב. מרחקה של הנקודה A , מן הצלע BC הוא למעשה אורך האנך AD היורד מהקדקוד A אל הצלע BC . ניעזר בשטח המשולש שמצאנו בסעיף א' ונחשב את אורך האנך.



נציב $t = 8$ בפונקציית המטרה ונמצא את $S_{\Delta ABC}$:

$$8 f(8) = \frac{512}{8^2} + 2 \cdot 8 - 16 =$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = 8 \text{ יח"ר} \quad \text{נביע } S_{\Delta ABC} \text{ בדרך נוספת:}$$

נחשב את אורכו של BC באמצעות משפט פיתגורס במשולש ΔOBC : $BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ יח'.

$$\frac{\sqrt{80} \cdot AD}{2} = 8 \rightarrow \boxed{AD = 1.78 \text{ יח'}} \quad \text{נחזור ונציב בנוסחת השטח ונחשב את אורכו של } AD:$$

פתרון מלא - מבחן 7**שאלה 1:**

א. ראשית, נזכיר את ההבדל העיקרי בין בעיות הספק לבעיות עבודה :
בבעיות הספק אין לנו מידע על קצב העבודה הממשי או על היקף העבודה, אלא רק על החלק היחסי שבוצע מהעבודה הכללית.
בבעיות עבודה, לעומת זאת, ישנו מידע מוגדר על קצב העבודה הממשי או על היקף העבודה כולו.

נשים לב כי בשאלה קיים נתון המספק לנו מידע על קצב העבודה הממשי של גליה : ("הגבירה ב- 35 מבחנים לשעה") ומכאן נסיק שזו **בעיית עבודה**.

נסמן ב- x וב- y את קצב העבודה של נעמה וגליה בהתאמה (קצב העבודה = מספר המבחנים לשעה שכל אחת בודקת).

סה"כ עבודה	זמן	קצב		
$2x$	← 2	x	נעמה	השעתיים הראשונות בהן נעמה וגליה עבדו יחדיו
$2y$	← 2	y	גליה	

נמלא את הנתונים הראשונים בטבלה :

כלומר, סך כל המבחנים ששתיהן בדקו ביחד בשעתיים הראשונות הוא : $2x + 2y$ מבחנים.

נשים לב כי לפי הנתון, כמות זו מהווה מחצית ממכסת המבחנים היומית.

מכאן ניתן להסיק שאילו היו ממשיכות לעבוד **לפי התכנון**, היו מסיימות את המחצית השנייה של העבודה $2x + 2y$ (מבחנים) **בשעתיים נוספות**.

לאחר שעתיים עזבה נעמה, וגליה המשיכה לעבוד לבד. נשלים את הנתונים הבאים בטבלה :

סה"כ עבודה	זמן	קצב		
$y + 35$	1	$y + 35$	גליה	כאשר גליה הגבירה את הקצב
$5y - 25$	5	$y - 5$	גליה	לו גליה הייתה מפחיתה את הקצב

לפי הנתון הראשון, כשגליה הגבירה את קצב עבודתה, היא תסיים את הבדיקה שעה לפני המתוכנן (כלומר בשעה אחת).
 לפי הנתון השני, אם גליה תפחית את קצב עבודתה, היא תסיים את הבדיקה שלוש שעות לאחר הזמן המתוכנן (כלומר בחמש שעות).

בשני המקרים סה"כ העבודה של גליה שווה, ולכן נקבל את המשוואה :

$$y + 35 = 5y - 25 \rightarrow 4y = 60 \rightarrow \boxed{y = 15}$$

כלומר, לאחר עזיבתה של נעמה, גליה בודקת את מחצית המבחנים שנותרו : $y + 35$ ולאחר הצבת y נקבל : 50 מבחנים.

כמות מבחנים זו שווה גם לסך העבודה שעשו גליה ונעמה בשעתיים הראשונות ביחד ולכן :

$$2x + 2y = 50 \rightarrow 2x + 2 \cdot 15 = 50 \rightarrow 2x = 20 \rightarrow \boxed{x = 10}$$

לסיכום : בשעתיים הראשונות, עבדה נעמה בקצב של 10 מבחנים בשעה, וגליה בקצב של 15 מבחנים בשעה.

ב. נסמן ב- p את השיעור (האחוז) בו הפחיתה גליה את קצב עבודתה ונעמה הגבירה את קצב עבודתה.

נקבל שקצב העבודה החדש של גליה הוא: $15 \cdot \left(\frac{100-p}{100}\right)$ וקצב העבודה החדש של נעמה: $10 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)$.

לפי הנתון שתייהן החלו לעבוד באותו הזמן וסיימו לעבוד באותו הזמן. שתייהן בדקו מחצית ממכסת המבחנים היומית. מכאן ניתן להסיק ששתייהן עבדו בקצב זהה. נשווה בין הקצב החדש שלהן ונקבל:

$$\left(\frac{100+p}{100}\right) \cdot 10 = \left(\frac{100-p}{100}\right) \cdot 15 \rightarrow (100+p) \cdot 2 = (100-p) \cdot 3 \rightarrow 5p = 100 \rightarrow \boxed{p=20\%}$$

שאלה 2:

א. נתונות שתי סדרות חשבוניות.

לשם הנוחות נסדר את נתוני השאלה
בטבלה הבאה:

הסדרה הראשונה: b_n	הסדרה השנייה: c_n	
$-d$	$2d$	D
n	$30 - n$	N
$2a_1$	$-a_1$	A_1

מספר האיברים הכולל בשתי הסדרות יחד הוא 30.

נסמן את מספר האיברים בסדרה הראשונה ב- n ונקבל שמספר האיברים בסדרה השנייה הוא: $30 - n$.

כמו כן, נתון שהאיבר האחרון בסדרה הראשונה שווה לאיבר האחרון בסדרה השנייה.

לכן עבור כל אחת מהסדרות נמצא את האיבר האחרון לפי נוסחת האיבר הכללי $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$b_n = 2a_1 + (n-1)(-d) = 2a_1 - d(n-1)$$

$$c_{30-n} = -a_1 + (30-n-1)(2d) = -a_1 + 2d(29-n)$$

ולאחר השוואה ביניהם נקבל:

$$b_n = c_{30-n} \rightarrow 2a_1 - d(n-1) = -a_1 + 2d(29-n) \rightarrow 3a_1 = d(n-1) + 2d(29-n)$$

$$\rightarrow 3a_1 = d[(n-1) + 2(29-n)] \rightarrow 3a_1 = d(57-n)$$

נשים לב שמספר איברי הסדרה השנייה בהכרח אי-שלילי ולכן מתקיים:

$$0 < 30 - n \rightarrow n < 30 \rightarrow n < 57 \rightarrow 0 < 57 - n$$

ומכאן שמהשוויון: $3a_1 = d(57-n)$ נוכל להסיק ש- a_1 ו- d שניהם בהכרח בעלי אותו סימן.מכאן שאם $0 < a_1$ אז בהכרח $0 < d$ ולכן הטענה הנכונה היא טענה ii.ב. נתון שהסדרה הראשונה עולה ולכן: $0 < -d \rightarrow d < 0$.נמצא את סכום הסדרה הראשונה לפי הנוסחה: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 2a_1 + (n-1)(-d)] = \frac{n}{2}[4a_1 - d(n-1)] \quad \left/ \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} \right. [3 \cdot 4a_1 - 3d(n-1)]$$

$$= \frac{n}{6}[4 \cdot 3a_1 - 3d(n-1)]$$

כעת נוכל להציב $3a_1 = d(57 - n)$ לפי סעיף א' :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{6} [4 \cdot 3a_1 - 3d(n-1)] = \frac{n}{6} [4 \cdot d(57-n) - 3d(n-1)] = \frac{dn}{6} [4 \cdot (57-n) - 3(n-1)] \\ &= \frac{dn}{6} [231 - 7n] = \frac{7dn}{6} (33 - n) \end{aligned}$$

נשתמש בשנית בכך שמספר איברי הסדרה השנייה הינו אי-שלילי :

$$0 < 30 - n \rightarrow n < 30 \rightarrow n < 33 \rightarrow 0 < 33 - n$$

כמו כן, $0 < n$ וגם $d < 0$ ולכן מתקיים : $S_n = \frac{7dn}{6} \underbrace{(33 - n)}_{-}$ ונסיק שסכום הסדרה הראשונה הוא שלילי.

ג. נתון שסכום הסדרה השנייה חיובי. נחשב את הסכום לפי הנוסחה : $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

$$\begin{aligned} S_{30-n} &= \frac{30-n}{2} [2 \cdot (-a_1) + (30-n-1)(2d)] = \frac{30-n}{2} \cdot 2 \cdot [-a_1 + (30-n-1)d] \\ &= (30-n)[-a_1 + (29-n)d] \Bigg/ \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{3} \cdot (30-n)[-3a_1 + 3(29-n)d] \\ &= \frac{(30-n)}{3} [-3a_1 + (29-n)3d] \end{aligned}$$

כעת נוכל להציב $3a_1 = d(57 - n)$ לפי סעיף א' :

$$\begin{aligned} S_{30-n} &= \frac{(30-n)}{3} [-d(57-n) + (29-n)3d] = \frac{d(30-n)}{3} [-(57-n) + (29-n)3] \\ &= \frac{d(30-n)}{3} (30-2n) \end{aligned}$$

וכיוון שנתון שהסכום חיובי נקבל את אי-השוויון :

$$0 < S_{30-n} \rightarrow 0 < \frac{d(30-n)}{3} (30-2n) \Bigg/ : \frac{d}{3} < 0 \rightarrow (30-n)(30-2n) < 0$$

פתרון אי השוויון הוא : $15 < n < 30$.

מכאן שבהכרח מתקיים גם : $0 < 30 - n < 15$.

לפי כלל המעבר : $30 - n < n$ כלומר מספר האיברים בסדרה הראשונה גדול יותר.

לסיכום, בסדרה הראשונה יותר איברים מאשר בסדרה השנייה.

שאלה 3:

א. ההתלבטות הראשונית בפתרון בעיה בהסתברות היא לרוב האם נפתור את התרגיל באמצעות טבלה או באמצעות עץ. שאלות בסגנון "הוצאת כדורים מכובע" נפתור לרוב בשיטת העץ.

ראשית נסכם את הנתונים הידועים בשאלה:

בארגז א' 8 פירות בסך הכל: 4 אננסים, 3 קוקוסים ותפוז אחד.

נמצא את ההסתברויות להוציא כל פרי מארגז א':

$$\text{ההסתברות להוציא אננס: } \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{ההסתברות להוציא קוקוס: } \frac{3}{8} \quad \text{ההסתברות להוציא תפוז: } \frac{1}{8}$$

נחשב באופן דומה את ההסתברויות של שני הארגזים הנוספים:

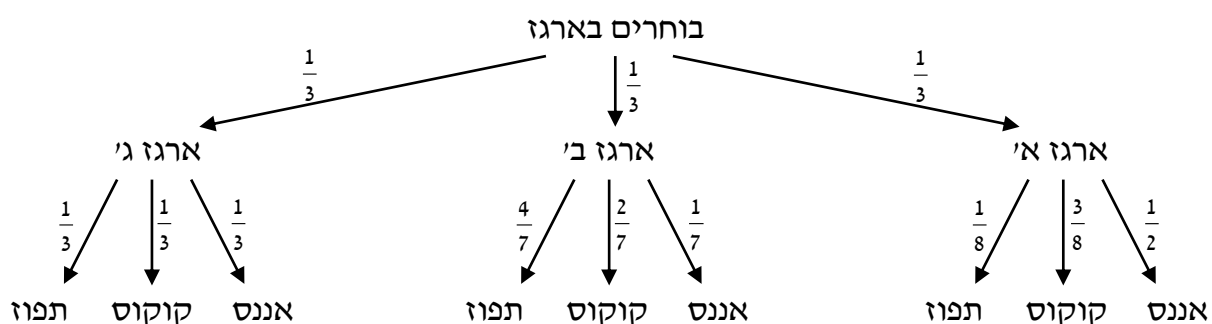
$$\text{ארגז ב': ההסתברות להוציא אננס: } \frac{1}{7} \quad \text{ההסתברות להוציא קוקוס: } \frac{2}{7} \quad \text{ההסתברות להוציא תפוז: } \frac{4}{7}$$

$$\text{ארגז ג': ההסתברות להוציא אננס: } \frac{1}{3} \quad \text{ההסתברות להוציא קוקוס: } \frac{1}{3} \quad \text{ההסתברות להוציא תפוז: } \frac{1}{3}$$

בשלב ראשון בוחרים באקראי בארגז אחד מתוך שלושת הארגזים. כיוון שהסיכוי של כל ארגז להיבחר הוא

שווה, נקבל כי הסיכוי לבחור בארגז כלשהו הוא: $\frac{1}{3}$. לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מתוך הפירות

שבארגז הנבחר. נציג את התרחישים האפשריים בעץ:



נשים לב שבשאלה מופיעות המלים ידוע שהוצא אננס. ניסוח זה מצביע על **הסתברות מותנית**. כלומר, איננו עוסקים עוד בהוצאה תיאורטית אשר בה כל אפשרויות ההוצאה קיימות, אלא ב"עולם אפשרויות" מצומצם (מותנה), בו אפשרויות ההוצאה היחידות הקיימות הן אלו אשר עומדות בתנאי שניתן לנו.

בסעיף זה "עולם האפשרויות" מצומצם יותר ולכן אנו עוברים מעץ שלם לעץ חלקי.

ידוע שהוצא אננס ולכן בעץ קיימים רק שלושת המסלולים שבסופם מוציאים אננס מארגז:



זוהי **הסתברות מותנית** ובמקרים כאלו עלינו **לחלק** את ההסתברות של המאורע המסוים (הוצא אננס מארגז א', הענף המודגש הימני - $P(B \cap A)$) בהסתברות של "העולם החדש" והמצומצם (הוצא אננס מארגז כלשהו, כל הענפים השחורים - $P(A)$):

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{21}{41}}{\frac{21}{41}} \approx 0.512$$

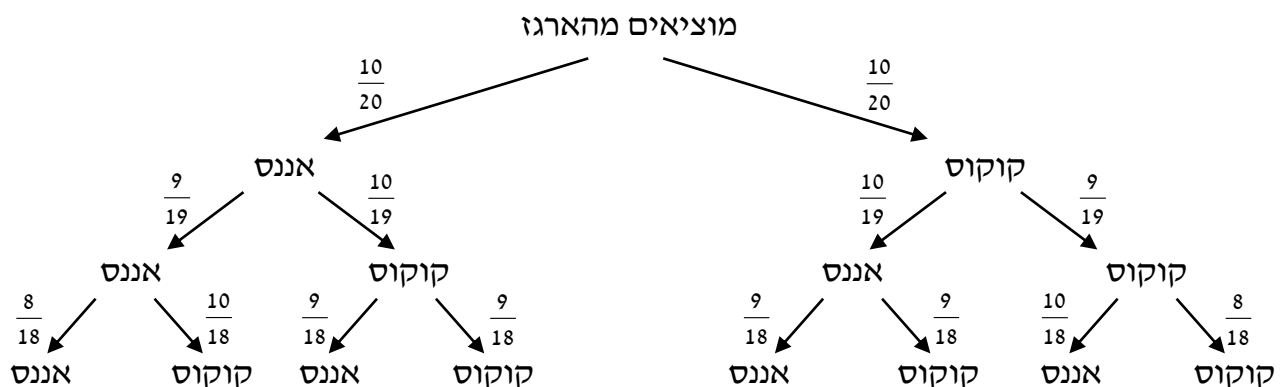
ב. כעת שמים את כל הקוקוסים והאננסים בארגז אחד ללא התפוזים.

כלומר, בארגז כעת 20 פירות: 10 אננסים ו-10 קוקוסים.

מוציאים מהארגז שלושה פירות ללא החזרה.

נציג את התרחישים האפשריים בעץ בו לכל הוצאה קומה משלה:

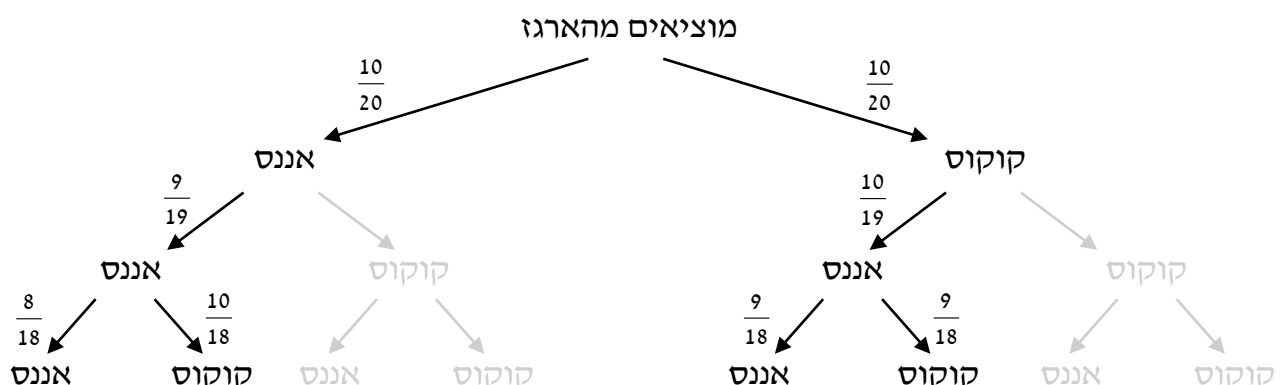
נשים לב כי בכל הוצאה של פרי, מספר הפירות מאותו הסוג פוחת באחד, אך מספר הפירות מהסוג השני נותר ללא שינוי. בהתאם נעדכן את ההסתברויות במורד העץ.



גם בסעיף זה ידוע כי הפרי השני שהוצא היה אננס ולכן זוהי **הסתברות מותנית**. בסעיף זה "עולם

האפשרויות" מצומצם יותר ולכן אנו עוברים מעץ שלם לעץ חלקי.

ידוע שהפרי השני שהוצא היה אננס ולכן בעץ קיימים רק המסלולים בהם הפרי השני שהוצא היה אננס:



נחלק את ההסתברות של המאורע המסוים (הפרי האחרון שהוצא הוא קוקוס - שני ענפים מודגשים - $P(B \cap A)$) בהסתברות של "העולם החדש" והמצומצם (הוצא אננס בהוצאה השנייה, כל הענפים השחורים - $P(A)$):

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} + \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18}}{\frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} + \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} + \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} + \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}} = \frac{\frac{10}{19}}{\frac{10}{19}} \approx \boxed{0.526}$$

ג. כעת מכניסים את כל הפירות לארגז אחד, כך שבארגז 30 פירות: 10 תפוזים, 10 קוקוסים ו-10 אננסים. כיוון שאנו מבצעים ארבע הוצאות **עם החזרה** ניעזר בנוסחת ברנולי. נשים לב שסעיף זה גם עוסק ב**הסתברות מותנית**, מאחר וידוע שלא הוצאו תפוזים כלל.

נחלק את ההסתברות של המאורע המסוים (לא הוצאו קוקוסים וגם לא הוצאו תפוזים) בהסתברות של "העולם החדש" והמצומצם (לא הוצאו תפוזים):

נגדיר באמצעות A את האירוע: "לא הוצאו תפוזים":

$n = 4$ הוצאות.

$k = 0$ הוצאות של תפוזים.

$p = \frac{1}{3}$ הסיכוי להוציא תפוז בהוצאה אחת.

$$\cdot \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

נציב בנוסחת ברנולי ונקבל את ההסתברות שלא הוצאו תפוזים:

נגדיר באמצעות B את האירוע: "לא הוצאו קוקוסים".

בהתאם, נגדיר באמצעות $B \cap A$ את האירוע: "לא הוצאו תפוזים וגם לא הוצאו קוקוסים". כלומר, בכל ארבע ההוצאות הוצאו רק אננסים:

$n = 4$ הוצאות.

$k = 4$ הוצאות של אננסים.

$p = \frac{1}{3}$ הסיכוי להוציא אננס בהוצאה אחת.

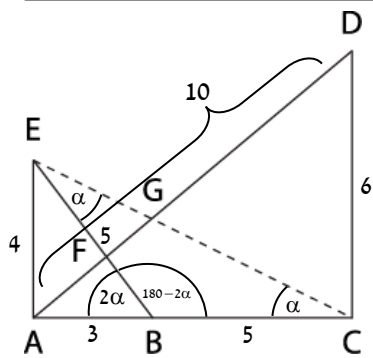
$$\cdot \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

נציב בנוסחת ברנולי ונקבל את ההסתברות שהוצאו רק אננסים:

כפי שהסברנו בתחילת הסעיף, נחלק את ההסתברויות שחישבנו זו בזו ונקבל את תוצאת ההסתברות המותנית:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{81}}{\frac{16}{81}} = \frac{1}{16} = \boxed{0.0625}$$

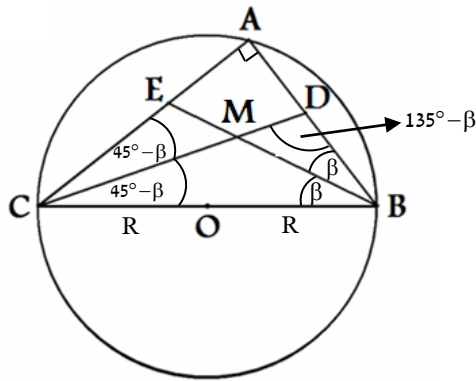
שאלה 4



א. נסמן תחילה את הנתונים בשרטוט ונשלים את הזוויות במשולש $\triangle EBC$:

נתון + סימון	(1) $\angle BEC = \alpha \rightarrow \angle ABE = 2\alpha$
נתון	(2) $BE = 5$ ס"מ, $AB = 3$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ
נתון	(3) $AD = 10$ ס"מ, $CD = 6$ ס"מ
סכום שתי זוויות צמודות הוא 180°	(4) $\angle EBC = 180^\circ - 2\alpha$
סכום זוויות במשולש הוא 180°	(5) $\angle BCE = \alpha$
משולש בעל שתי זוויות בסיס שוות הוא שווה שוקיים	(6) משולש $\triangle BCE$ שווה שוקיים
במשולש, מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות	(7) $BC = BE = 5$ ס"מ
חיבור קטעים. נובע מתוך (2) ו-(7)	(8) $AC = AB + BC = 8$ ס"מ
חישוב + הצבה. נובע מתוך (2), (3), (7) ו-(8)	(9) $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{AD} = \frac{1}{2}$
לפי משפט דמיון צ.צ.צ. נובע מתוך (9)	(10) $\triangle EAB \sim \triangle ACD$ מש"ל א'
ב.	
חישוב + הצבה	(11) $AB^2 + AE^2 = BE^2 \rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$
משפט פיתגורס הפוך	(12) $\angle EAB = 90^\circ$
חישוב + הצבה	(13) $CD^2 + AC^2 = AD^2 \rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2$
משפט פיתגורס הפוך	(14) $\angle ACD = 90^\circ$
שני ישרים שסכום הזוויות החד-צדדיות שלהם 180° , מקבילים זה לזה. מתוך (12) ו-(14)	(15) $AE \parallel CD$ מש"ל ב'
ג.	
סימון	(16) $AG = x$
חיסור קטעים	(17) $GD = 10 - x$
משפט תאלס הרחבה ב'. נובע מתוך (15)	(18) $\frac{AE}{CD} = \frac{AG}{GD} \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{x}{10-x} \rightarrow 20 - 2x = 3x$ $5x = 20 \rightarrow x = 4$
הצבה לפי (16), (17) ו-(18)	(19) $AG = 4$ ס"מ, $GD = 6$ ס"מ מש"ל ג'.
ד.	
נובע מתוך (3) ו-(19)	(20) משולש $\triangle GCD$ שווה שוקיים
חיסור זוויות. לפי (5) ו-(14)	(21) $\angle GCD = 90^\circ - \alpha$
במשולש, מול צלעות זוויות נמצאות זוויות שוות	(22) $\angle CGD = \angle GCD = 90^\circ - \alpha$
זוויות קודקודיות שוות	(23) $\angle FGE = \angle CGD = 90^\circ - \alpha$
סכום זוויות במשולש $\triangle EFG$ הוא 180°	(24) $\angle EFG = 90^\circ$
נובע מתוך (12) ו-(24) וכלל המעבר	(25) $\angle EFG = \angle CAE$
נובע מתוך (1) ו-(5) וכלל המעבר	(26) $\angle FAE = \angle ACE$
לפי משפט דמיון ז.ז. מתוך (25) ו-(26)	(25) $\triangle EFG \sim \triangle CAE$ מש"ל ד'.

שאלה 5:



א.

מהנתון - הקוטר ארוך פי שניים מהרדיוס	$BC = 2R$	(1)
נתון	$\angle ABC = 2\beta$	(2)
מהנתון ש- BE חוצה את הזווית $\angle ABC$	$\angle ABE = \angle EBC = \beta$	(3)
מהנתון ש- CD חוצה את הזווית $\angle ACB$	$\angle BCD = \angle ACD$	(4)
זווית היקפית הנשענת על קוטר היא בת 90°	$\angle BAC = 90^\circ$	(5)
סכום הזוויות במשולש $\triangle ABC$ הוא 180°	$\angle ACB = 90^\circ - 2\beta$	(6)
לפי (4) ו-(6)	$\angle BCD = \angle ACD = 45^\circ - \beta$	(7)
סכום הזוויות במשולש $\triangle BCD$ הוא 180°	$\angle BDC = 135^\circ - \beta$	(8)

(9) נבטא את הצלע BD באמצעות משפט הסינוסים במשולש $\triangle BCD$:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} \rightarrow \frac{BD}{\sin(45^\circ - \beta)} = \frac{2R}{\sin(135^\circ - \beta)} \rightarrow BD = \frac{2R \cdot \sin(45^\circ - \beta)}{\sin(135^\circ - \beta)}$$

ניעזר בזהות: $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$ ונקבל כי: $\sin(135^\circ - \beta) = \sin(180^\circ - (135^\circ - \beta)) = \sin(45^\circ + \beta)$

נציב את התוצאה שקיבלנו בחזרה בביטוי שפיתחנו לצלע BD ונקבל:

$$BD = \frac{2R \cdot \sin(45^\circ - \beta)}{\sin(45^\circ + \beta)}$$

מש"ל א'.

ב. ניעזר בזהות לסינוס של סכום זוויות: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ ונקבל:

$$\frac{\sin(45^\circ - \beta)}{\sin(45^\circ + \beta)} = \frac{\sin 45^\circ \cdot \cos \beta - \cos 45^\circ \cdot \sin \beta}{\sin 45^\circ \cdot \cos \beta + \cos 45^\circ \cdot \sin \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \beta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \beta - \sin \beta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \beta + \sin \beta)}$$

ולאחר צמצום נקבל:

$$\frac{\sin(45^\circ - \beta)}{\sin(45^\circ + \beta)} = \frac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta}$$

מש"ל ב'.

ג. נתון כי: $R = \left(\frac{100 + 10}{100} \right) \cdot BD$. נציב בתוצאת סעיף א' ונקבל: $R = \frac{1.1 \cdot 2R \cdot \sin(45^\circ - \beta)}{\sin(45^\circ + \beta)}$

נציב גם את התוצאה שקיבלנו בסעיף ב' ונקבל: $1 = \frac{2.2 \cdot (\cos \beta - \sin \beta)}{\cos \beta + \sin \beta}$. נכפול את המשוואה במכנה ונקבל:

$$\cos \beta + \sin \beta = 2.2 \cos \beta - 2.2 \sin \beta \rightarrow 3.2 \sin \beta = 1.2 \cos \beta \rightarrow \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1.2}{3.2}$$

ניעזר בזהות: $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ ונקבל: $\tan \beta = \frac{1.2}{3.2} = 0.375$. נחשב את הזווית ונקבל: $\beta = 20.56^\circ$ מש"ל ג'

שאלה 6:

א.1. אחת מנקודות הפיתול של גרף הפונקציה $f(x) = a \sin 2x + 4 \sin bx + 6x$ בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

נמצאת על הישר $x = \pi$. ידוע כי בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת ולכן נגזור את הפונקציה $f(x)$ פעמיים, נציב $x = \pi$ ונשווה ל-0:

לאחר שנגזור פעם אחת נקבל: $f'(x) = 2a \cos 2x + 4b \cos bx + 6$. נגזור פעם נוספת ונקבל:

$$f''(x) = -4a \sin 2x - 4b^2 \sin bx$$

$$f''(\pi) = -4a \sin(2 \cdot \pi) - 4b^2 \sin(b \cdot \pi) = 0 \quad \text{נציב } x = \pi \text{ ונשווה את הנגזרת השנייה לאפס:}$$

$$-4b^2 \sin(b \cdot \pi) = 0 \quad \text{נשים לב כי } \sin(2 \cdot \pi) = 0 \text{ ולכן נקבל:}$$

$$\sin(b \cdot \pi) = 0. \quad \text{נתון כי } 0 < b < 2 \text{ ולכן מותר לצמצם ב: } -4b^2. \text{ לאחר הצמצום נקבל:}$$

$$b \cdot \pi = \pi \cdot k \rightarrow b = k \quad \text{נזכור כי הפתרון הכללי של משוואה מהצורה: } \sin x = 0 \text{ הוא: } x = \pi k \text{ ולכן:}$$

$$b = 1. \quad \text{כיוון ש-} k \text{ מקבל ערכים שלמים בלבד ונתון כי } 0 < b < 2, \text{ נקבל כי הפתרון היחיד האפשרי הוא:}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ניעזר בנתון השני כדי למצוא את ערכו של הפרמטר } a: \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ הוא 8. כיוון ששיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה, נציב בנגזרת } x = \frac{\pi}{2} \text{ ו-} b = 1 \text{ ונשווה}$$

אותה ל-8:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot 1 \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 6 = 8 \rightarrow 2a \cos \pi + 4 \cos \frac{\pi}{2} = 2 \rightarrow -2a = 2 \rightarrow \boxed{a = -1}$$

א.2. בכדי למצוא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ נשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x) = -2 \cos 2x + 4 \cos x + 6 = 0$$

$$\text{ניעזר בזהות לקוסינוס של זווית כפולה: } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ ונקבל:}$$

$$-2(2 \cos^2 x - 1) + 4 \cos x + 6 = 0 \rightarrow -4 \cos^2 x + 4 \cos x + 8 = 0 \rightarrow \cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

$$\text{נסמן } \cos x = t \text{ ונקבל את המשוואה הריבועית: } t^2 - t - 2 = 0 \text{ שפתרונותיה הם: } t = 2, t = -1.$$

נציב בחזרה $t = \cos x$ ונקבל: $\cos x = 2$ או $\cos x = -1$. למשוואה הראשונה אין פתרון ונותרנו עם

$$\text{המשוואה: } \cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi k. \text{ הפתרון היחיד בתחום } -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \text{ הוא } x = \pi \text{ אך מהנתון אנו}$$

יודעים כי זוהי נקודת פיתול. ניעזר בטבלת עליה וירידה בכדי למצוא את סוגן של נקודות הקיצון בקצות התחום:

תחום x	$x = -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} < x < \pi$	$x = \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{3\pi}{2}$
נציב בנגזרת	קצה	$x = 0$	פיתול	$x = 1.25\pi$	קצה
סימן הנגזרת		+	0	+	
הפונקציה עולה/יורדת	min				max

נציב את נקודות הקיצון בפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעורי ה- y שלהן:

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + 4\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 6 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -8.88 \rightarrow \boxed{\min\left(-\frac{\pi}{3}, -8.88\right)} \quad (\text{קיצון בקצה התחום})$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 6 \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right) = 24.27 \rightarrow \boxed{\max\left(\frac{3\pi}{2}, 24.27\right)} \quad (\text{קיצון בקצה התחום})$$

3.א. נמצא את נקודות הפיתול של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון. נשווה את הנגזרת השנייה ל-0:

$$f''(x) = 4\sin 2x - 4\sin x = 0$$

$$4 \cdot 2\sin x \cos x - 4\sin x = 0$$

ניעזר בזהות לסינוס של זווית כפולה $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ונקבל:

$$4\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$$

$$4\sin x = 0 \leftarrow \sin x = 0 \quad \text{הפתרון הכללי הוא } x = \pi k$$

$$2\cos x - 1 = 0 \leftarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{הפתרונות הכלליים הם: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

הפתרונות בתחום הנתון הם: $x = -\frac{\pi}{3}, x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \pi$. נמצא את תחומי הקעירות באמצעות טבלה:

תחום x	$x = -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \pi$	$x = \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
נציב בנגזרת השנייה	פיתול	$x = -\frac{\pi}{6}$	פיתול	$x = 0$	פיתול	$x = \frac{\pi}{2}$	פיתול	$x = 1.25\pi$
סימן הנגזרת השנייה	0	-	0	+	0	-	0	+
קעירות כלפי מעלה/מטה		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

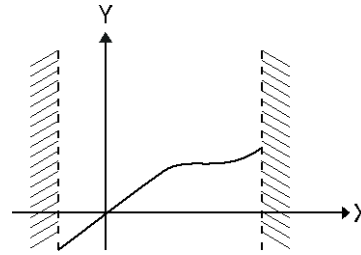
מהטבלה ניתן לראות כי לגרף הפונקציה קעירות $\cup$ בתחומים: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ או $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

כמו כן, לגרף הפונקציה קעירות $\cap$ בתחומים: $-\frac{\pi}{3} < x < 0$ או $\frac{\pi}{3} < x < \pi$.

4.א. נציב $x = 0$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ ונמצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- y :

$$f(0) = -\sin(0) + 4\sin(0) + 6 \cdot 0 = 0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

ב. השרטוט:



ג. ניתן לראות כי השטח הרצוי כלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה-x בתחום שבין $x=0$ ו- $x=\frac{3\pi}{2}$.

נחשב את האינטגרל המתאים ונמצא את השטח:

$$S = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin 2x + 4\sin x + 6x - 0) dx \rightarrow S = \left. \frac{\cos 2x}{2} - 4\cos x + \frac{6x^2}{2} \right|_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

נציב את גבולות האינטגרל ונקבל:

$$S = \left(\frac{\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right)}{2} - 4\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{6 \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2} \right) - \left(\frac{\cos(0)}{2} - 4\cos(0) + \frac{6 \cdot 0^2}{2} \right) \rightarrow -\frac{1}{2} + 6.75\pi^2 - \left(\frac{1}{2} - 4\right) \rightarrow$$

$$S = 69.62 \text{ יח"ר}$$

שאלה 7

נתונה הפונקציה: $f(x) = (x^2 - 9)^{n+1}$. ידוע ש- n מספר טבעי גדול מ-1.

א. נבטא באמצעות n את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y :

$$f(0) = (0^2 - 9)^{n+1} = (-9)^{n+1} \rightarrow \boxed{(0, (-9)^{n+1})}$$

נבטא באמצעות n את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \rightarrow (x^2 - 9)^{n+1} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow \boxed{(-3, 0), (3, 0)}$$

ב. נמצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן מתקיים $f'(x) = 0$ ונקבע את סוגן:

ראשית נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = (n+1)(x^2 - 9)^n \cdot (2x)$$

מכאן שפתרון אפשרי אחד הוא $x = 0$ ונותר להשוות את שאר הגורמים בנגזרת ל-0 כדי למצוא האם קיימות נקודות חשודות נוספות:

$$(n+1)(x^2 - 9)^n = 0 \quad / : (n+1) \neq 0 \rightarrow (x^2 - 9)^n = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

מכאן שהנקודות החשודות הן: $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$ וכיוון שאלו אותן נקודות החיתוך עם הצירים

שמצאנו בסעיף הקודם אנו יודעים ששיעוריהן הם: $(-3, 0)$, $(0, (-9)^{n+1})$, $(3, 0)$.

כדי לקבוע את סוג הנקודות נבנה טבלת עלייה וירידה וכיוון שערך הנגזרת סביב הנקודות תלוי ב- n , נבחין בין ערכי n זוגיים וערכי n אי-זוגיים:

עבור ערכי n זוגיים:

תחום x	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
נציב בנגזרת	$x = -4$		$x = -1$		$x = 1$		$x = 4$
ערך הנגזרת	$\underbrace{-8(n+1)7^n}_{+}$	0	$\underbrace{-2(n+1)(-8)^n}_{+}$	0	$\underbrace{2(n+1)(-8)^n}_{+}$	0	$\underbrace{8(n+1)7^n}_{+}$
סימן הנגזרת	-		-		+		+
הפונקציה עולה/יורדת		פיתול		min		פיתול	

מכאן שעבור ערכי n זוגיים:

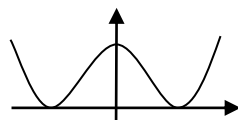
הנקודה $(0, (-9)^{n+1})$ היא קיצון מסוג מינימום ואילו הנקודות $(-3, 0)$, $(3, 0)$ הן נקודות פיתול.

עבור ערכי n אי-זוגיים :

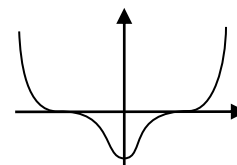
תחום x	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
נציב בנגזרת	$x = -4$		$x = -1$		$x = 1$		$x = 4$
ערך הנגזרת	$-8(n+1)7^n$ - +	0	$-2(n+1)(-8)^n$ - -	0	$2(n+1)(-8)^n$ + -	0	$8(n+1)7^n$ + +
סימן הנגזרת	-		+		-		+
הפונקציה עולה/יורדת		min		max		min	

מכאן שעבור ערכי n אי-זוגיים :

הנקודה $(0, (-9)^{n+1})$ היא קיצון מסוג מקסימום ואילו הנקודות $(-3, 0)$, $(3, 0)$ הן קיצון מסוג מינימום.



עבור n אי זוגי :



ג. עבור n זוגי :

ד. הגדירו פונקציה חדשה : $g(x) = x \cdot f(x)$.

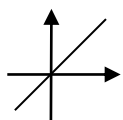
1. ראשית נראה שמתקיים :

$$f(-x) = ((-x)^2 - 9)^{n+1} = (x^2 - 9)^{n+1} = f(x)$$

ומכאן ש- $f(x)$ היא פונקציה זוגית. לכן :

$$g(-x) = (-x) \cdot f(-x) = (-x) \cdot f(x) = -x \cdot f(x) = -g(x)$$

מכאן שהפונקציה $g(x)$ היא אי-זוגית.



2. n הוא אי זוגי ולכן גרף הפונקציה $f(x)$ הוא :



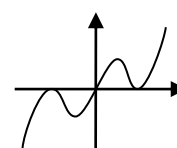
, כמו כן גרף הפונקציה x הוא :

ניעזר כעת בטבלת תחומי החיוביות והשליליות הבאה המסתמכת על השרטוטים שהצגנו :

תחום x	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
סימן $f(x)$	+	0	+	+	+	0	+
סימן x	-	-	-	0	+	+	+
סימן $g(x) = x \cdot f(x)$	-	0	-	0	+	0	+

לאחר שמצאנו את נקודות האפס של גרף הפונקציה $g(x)$ ואת תחומי החיוביות והשליליות שלו נוכל לצייר

את הסקיצה הבאה :



3. נתון שסכום השטחים הכלואים בין גרף הפונקציה $g(x)$ לבין ציר ה- x הוא: $\frac{9^5}{n+2}$.

כיוון שהוכחנו שהפונקציה $g(x)$ היא אי-זוגית, השטח הכלוא בינה לבין ציר ה- x , מימין לציר ה- y , שווה לשטח הכלוא בינה לבין ציר ה- x משמאל לציר ה- y .

מכאן שנוכל לחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ לבין ציר ה- x בתחום שבין $x=0$ לבין $x=3$ (נקודת האפס שמצאנו בעזרת טבלת החיוביות והשליליות בסעיף הקודם) ולאחר מכן להשוות אותו

למחצית השטח הנתון: $\frac{1}{2} \cdot \frac{9^5}{n+2}$ כדי למצוא את n .

ראשית נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 9)^{n+1} x dx \rightarrow \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 9 \\ du = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = x dx \end{array} \right] \rightarrow \int u^{n+1} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{n+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{n+2}}{n+2} \Big|_0^3 \rightarrow \left[u = x^2 - 9 \right] \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 9)^{n+2}}{n+2} \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{(3^2 - 9)^{n+2}}{n+2} - \frac{(0^2 - 9)^{n+2}}{n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[0 - \frac{(-9)^{n+2}}{n+2} \right] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-9)^{n+2}}{n+2}$$

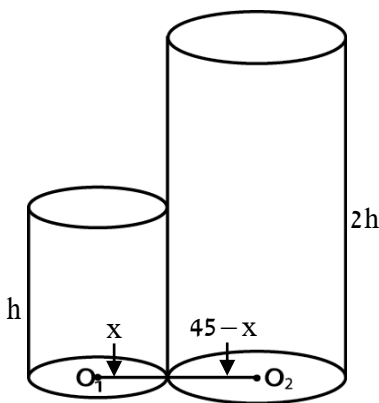
כעת נשווה לשטח הנתון:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-9)^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9^5}{n+2} \rightarrow -(-9)^{n+2} = 9^5 \quad / \cdot (-1) \rightarrow (-9)^{n+2} = -9^5$$

$$\rightarrow n+2=3 \rightarrow n=3$$

לסיום: $\boxed{n=3}$

שאלה 8:



א. זוהי בעיית ערך קיצון גיאומטרית. נסמן את רדיוס הגליל השמאלי ב- x ונביע את פונקציית המטרה המתארת את סכום נפחי שני הגלילים. נסמן את גובה הגליל השמאלי בפרמטר h ולפי הנתון גובה הגליל הימני הוא $2h$.

לפי הנתון, אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 45 ס"מ ולכן בעזרת חישוב קטעים נקבל כי אורך רדיוס הגליל הימני הוא $45 - x$.

נזכור כי נפח גליל שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה הגליל ונקבל כי נפח הגליל השמאלי הוא: $V_1 = \pi \cdot x^2 \cdot h$ ונפח הגליל הימני הוא: $V_2 = \pi(45 - x)^2 \cdot 2h$.

מכאן שפונקציית המטרה המתארת את סכום נפחי הגלילים היא (נבחין כי המשתנה הוא x ואילו h הוא רק

$$f(x) = V_1 + V_2 \rightarrow f(x) = \pi \cdot x^2 \cdot h + \pi(45 - x)^2 \cdot 2h \rightarrow f(x) = \pi h \cdot x^2 + 2\pi h(45 - x)^2 \quad \text{פרמטר):}$$

$$f'(x) = 2\pi h \cdot x - 4\pi h(45 - x) = 0 \quad \text{נגזור ונשווה ל-0 על מנת למצוא את ערך הקיצון:}$$

$$x - 2(45 - x) = 0 \rightarrow 3x = 90 \rightarrow \boxed{x = 30} \quad \text{ולאחר צמצום וסידור נקבל:}$$

$$f''(x) = 2\pi h + 4\pi h > 0 \quad \text{ניעזר בנגזרת השנייה בכדי לבדוק שהנקודה שקיבלנו היא אכן נקודת מינימום:}$$

ואכן, כיוון שהנגזרת השנייה חיובית הנקודה שקיבלנו היא נקודת מינימום. כלומר אורך רדיוס הגליל הימני שעבורו סכום נפחי שני הגלילים מינימלי הוא: **30 ס"מ**.

ב. כאשר סכום נפחי הגלילים מינימלי, רדיוס הגליל השמאלי הוא 30 ס"מ. מכאן שרדיוס הגליל הימני הוא 15 ס"מ.

נזכור כי שטח הפנים של גליל שווה לסכום שטח המעטפת ושטחי שני בסיסיו. כמו כן, שטח מעטפת של גליל שווה למכפלת היקף הבסיס בגובה הגליל.

$$2\pi R = 2\pi \cdot 15 = 30\pi$$

$$30\pi \cdot 2h = 60\pi h$$

$$\pi R^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$$

$$S = 60\pi h + 2 \cdot 225\pi = 60\pi h + 450\pi$$

נחשב את היקף הבסיס של הגליל הימני:

מכאן ששטח מעטפת הגליל הימני הוא:

נחשב את שטח הבסיס של הגליל הימני:

מכאן ששטח הפנים של הגליל הימני הוא:

$$60\pi h + 450\pi = 1,050\pi \rightarrow 60\pi h = 600\pi \rightarrow \boxed{h = 10}$$

לפי הנתון, שטח הפנים של הגליל הימני הוא $1,050\pi$ סמ"ר. נציב ונקבל:

כלומר, גובה הגליל השמאלי הוא **10 ס"מ**.

פתרון מלא - מבחן 8**שאלה 1:**

א. בשאלות הספק נפתח תמיד בסימון יעיל של ההספקים:

נסמן ב- x את **משך הזמן** הדרוש לנהג לסיים לבדו את העבודה כולה, ובהתאם, **הספקו** הוא $\frac{1}{x}$.

נסמן ב- y את **משך הזמן** הדרוש לאיכר לסיים לבדו את העבודה כולה, ובהתאם, **ההספק** שלו הוא $\frac{1}{y}$.

כעת נמלא את הנתונים הראשונים בטבלה:

החלק היחסי שבוצע מהעבודה	זמן	הספק		
$\frac{m}{x}$	m	$\frac{1}{x}$	נהג	הנהג מעמיס והאיכר פורק במשך m שעות
$-\frac{m}{y}$	m	$-\frac{1}{y}$	איכר	

נשים לב: פעולת האיכר הפוכה מפעולת הנהג ולכן ההספק שלו הוא **שלילי**.

לפי הנתון, בשלב זה מחצית מהמשאית הייתה מלא ולכן: (I) $\frac{m}{x} - \frac{m}{y} = \frac{1}{2}$

נמלא את הנתונים הבאים בטבלה:

החלק היחסי שבוצע מהעבודה	זמן	הספק		
$\frac{y}{9x}$	$\frac{y}{9}$	$\frac{1}{x}$	נהג	הנהג והאיכר מעמיסים ביחד עד שהמשאית התמלאה
$\frac{x}{2y}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{y}$	איכר	

נזכור כי הזמן הדרוש לאיכר לסיים לבדו את העבודה כולה הוא y ,

ומכאן שהנהג עבד $\frac{y}{9}$ שעות.

באופן דומה נקבל כי האיכר

עבד $\frac{x}{2}$ שעות.

לפי הנתון, השניים סיימו להעמיס את המחצית השנייה של התפוזים ולכן: (II) $\frac{y}{9x} + \frac{x}{2y} = \frac{1}{2}$

יש למצוא את היחס בין הספקו של הנהג לבין הספקו של האיכר. כלומר לחשב את היחס: $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{1} = \frac{y}{x}$

ניתן לראות כי משוואה (II) מספיקה לצורך כך. נשתמש בסימון עזר: $\frac{y}{x} = t$ ובהתאם: $\frac{x}{y} = \frac{1}{t}$ ונציב ב-(II).
נקבל:

$$\frac{t}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \rightarrow 2t^2 + 9 = 9t \rightarrow 2t^2 - 9t + 9 = 0 \rightarrow \boxed{t=3, t=1.5}$$

כלומר, קצב העבודה של הנהג גבוה מקצב העבודה של האיכר פי 3 או פי 1.5.

ב. בהתאם להנחיה בסעיף, נבחר את היחס בין קצבי העבודה: $\frac{y}{x} = 3$. כלומר: $\boxed{y=3x}$.

נציב $y=3x$ במשוואה (I) ונחשב את הקשר בין x ו- m :

$$\frac{m}{x} - \frac{m}{y} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{m}{x} - \frac{m}{3x} = \frac{1}{2} \rightarrow 6m - 2m = 3x \rightarrow \boxed{x = \frac{4m}{3}} \rightarrow \boxed{y = 4m}$$

ניעזר בטבלה ונחשב את משך הזמן שהיו השניים עובדים לו היו ממלאים את המשאית ביחד מתחילת העבודה:

החלק היחסי שבוצע מהעבודה	זמן	הספק		
$\frac{3t}{4m}$	$\leftarrow t$	$\frac{3}{4m}$	נהג	הנהג והאיכר מעמיסים ביחד מתחילת העבודה
$\frac{t}{4m}$	$\leftarrow t$	$\frac{1}{4m}$	איכר	

נסמן את זמן העבודה המשותף של השניים ב- t .

נזכור כי ההספק של הנהג הוא $\frac{1}{x}$. נציב

$$x = \frac{4m}{3} \text{ ונקבל כי הספקו הוא: } \frac{1}{\frac{4m}{3}} = \frac{3}{4m}$$

באופן דומה נחשב את הספקו של האיכר: $\frac{1}{4m}$.

לפי הנתון, השניים סיימו להעמיס את כל התפוזים על המשאית ומכאן נקבל:

$$\frac{3t}{4m} + \frac{t}{4m} = 1 \rightarrow 3t + t = 4m \rightarrow 4t = 4m \rightarrow \boxed{t=m} \text{ (שעות)}$$

שאלה 2

א. כדי להוכיח כי הסדרה B_n היא חשבונית, יש להראות שההפרש $b_{n+1} - b_n$ קבוע ואינו תלוי ב- n .

נתון כי: $b_n = 2n^2 + 2n - a_n$. נציב $n+1$ ונביע גם את b_{n+1} :

$$b_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) - a_{n+1} \rightarrow 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2 - a_{n+1} \rightarrow b_{n+1} = 2n^2 + 6n + 4 - a_{n+1}$$

נחשב את ההפרש $b_{n+1} - b_n$:

$$b_{n+1} - b_n = \underbrace{2n^2 + 6n + 4 - a_{n+1}}_{b_{n+1}} - \underbrace{(2n^2 + 2n - a_n)}_{b_n} \rightarrow \quad (I) \quad b_{n+1} - b_n = 4n + 4 + a_n - a_{n+1}$$

נתון כי: $a_{n+1} = a_n + 4n - 1$. נעביר אגף ונקבל: $a_n - a_{n+1} = 1 - 4n$. נציב ב-(I) ונקבל:

$$b_{n+1} - b_n = 4n + 4 + a_n - a_{n+1} = 4n + 4 + 1 - 4n \rightarrow b_{n+1} - b_n = 5$$

כלומר, הפרש הסדרה $d = 5$ הוא קבוע ומכאן שהסדרה אכן חשבונית.

בכדי למצוא את נוסחת האיבר הכללי, עלינו למצוא גם את האיבר הראשון b_1 . נציב בנוסחה הנתונה

ונקבל: $b_1 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - a_1$. לפי הנתון, $a_1 = 2$, ומכאן: $b_1 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 \rightarrow b_1 = 2$.

נציב את $d = 5$ ו- $b_1 = 2$ בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית ונקבל:

$$b_n = b_1 + d(n-1) \rightarrow b_n = 2 + 5(n-1) \rightarrow b_n = 5n - 3$$

ב. נשים לב כי הסכום $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2n} = 135$ הוא סכום האיברים הזוגיים בלבד בסדרה b_n .

כזכור, בסדרת האיברים הזוגיים מדלגים מעל האיברים האי זוגיים. מכאן שהפרש סדרת האיברים הזוגיים

הוא $2d$ ובמקרה זה 10. נחשב את האיבר הזוגי הראשון בסדרה: $b_2 = 5 \cdot 2 - 3 \rightarrow b_2 = 7$.

בנוסף, נשים לב כי על אף שהאיבר האחרון בסכום הוא b_{2n} , אנו סופרים רק חצי מהאיברים (הזוגיים

בלבד) ומכאן שמספר האיברים הזוגיים אותם אנו סופרים הוא: n . ניעזר בנוסחה לסכום סדרה חשבונית

ונקבל:

$$S_n = \frac{n}{2} (2 \cdot 7 + 10(n-1)) = 135 \rightarrow n(10n+4) = 270 \rightarrow 10n^2 + 4n - 270 = 0 \rightarrow n = \cancel{-5.4} \quad [n=5],$$

הפתרון $n = -5.4$ נפסל כיוון שלא יתכן שמספר האיברים הוא שלילי.

ג. נתבונן בנוסחה הנתונה: $b_n = 2n^2 + 2n - a_n$. בסעיף א' מצאנו כי $b_n = 5n - 3$. נציב ונקבל:

$$5n - 3 = 2n^2 + 2n - a_n \rightarrow a_n = 2n^2 - 3n + 3$$

ד. עלינו למצוא את מיקום של שני איברים בסדרה המקיימים: (II) $a_n + a_{n+1} = 137$.

נציב $n+1$ בנוסחת האיבר הכללי שמצאנו בסעיף ג' ונקבל: $a_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 3 = 2n^2 + n + 2$
נציב ב-(II) ונקבל:

$$a_n + a_{n+1} = 137 \rightarrow 2n^2 - 3n + 3 + 2n^2 + n + 2 = 137 \rightarrow 4n^2 - 2n - 132 = 0 \rightarrow n = \cancel{-5.5} \quad n = 6$$

הפתרון $n = -5.5$ נפסל כיוון שלא יתכן שמספר האיברים הוא שלילי.

מכאן שמיקומיהם של שני האיברים הסמוכים הם: **האיבר השישי והשביעי.**

שאלה 3:

א. נתון כי ההסתברות לעבור בהצלחה את מקצה ירי היום היא 0.75 וההסתברות לעבור את מקצה הלילה היא 0.8. רק מתמודד העובר בהצלחה את המקצה הראשון וגם את המקצה השני עולה לגמר. כזכור כדי למצוא את ההסתברות של מאורע A וגם מאורע B, כאשר המאורעות בלתי תלויים זה בזה, נכפיל את ההסתברויות של שני המאורעות זו בזו: $P(A) \cdot P(B)$. נקבל כי ההסתברות להגיע לגמר היא: $P(\text{final}) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$. כלומר, רק 0.6 מהמתמודדים יגיעו לגמר.

נתון כי בתחרות מתחרים 20 מועמדים, ומכאן שרק $0.6 \cdot 20 = 12$ מתוכם יגיעו לגמר. כלומר, 12 מתמודדים.

ב. סעיף זה מחלק את אוכלוסיית המתמודדים לפי שני מאפיינים: מצב משפחתי ("להיות נשוי" או "להיות רווק") והאם עלו לגמר ("עלו לגמר" או "לא עלו לגמר"). במקרה זה, נווח להשתמש בטבלה דו ממדית. נסמן את המאורע "עלו לגמר" כאירוע A ובהתאם המאורע המשלים "לא עלו לגמר" יסומן $\bar{A}$. נסמן את המאורע "להיות נשוי" כאירוע B ובהתאם המאורע המשלים "להיות רווק" יסומן $\bar{B}$.

בסעיף א' מצאנו כי הסיכוי לעלות לגמר הוא 0.6 ומכאן ש: $P(A) = 0.6$ ובהתאם: $P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$. נתון שההסתברות לבחור מבין המשתתפים רווק שעלה לגמר, $P(A \cap \bar{B})$, גדולה פי 6 מההסתברות לבחור מבין כל המשתתפים נשוי שלא עלה לגמר, $P(\bar{A} \cap B)$. נסמן: $P(\bar{A} \cap B) = x$ ונקבל $P(A \cap \bar{B}) = 6x$. נשלים את שאר התאים בטבלה:

ההסתברות לבחור בנשואים שעלו לגמר: $P(A \cap B) = 0.6 - 6x$.

ההסתברות לבחור ברווקים שלא עלו לגמר: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4 - x$.

ההסתברות לבחור בנשואים: $P(B) = x + 0.6 - x = 0.6 - 5x$.

ההסתברות לבחור ברווקים: $P(\bar{B}) = 6x + 0.4 - x = 5x + 0.4$.

סך הכל	לא עלו לגמר ($\bar{A}$)	עלו לגמר (A)	
$0.6 - 5x$	x	$0.6 - 6x$	להיות נשוי (B)
$5x + 0.4$	$0.4 - x$	6x	להיות רווק ($\bar{B}$)
1	0.4	0.6	סך הכל

נתון כי אין תלות בין המצב המשפחתי של המתמודדים לבין הצלחתם בתחרות.

כאשר שני מאורעות בלתי תלויים מתקיים: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. נציב את הנתונים מהטבלה ונקבל:

$$0.6 \cdot (0.6 - 5x) = 0.6 - 6x \rightarrow 0.36 - 3x = 0.6 - 6x \rightarrow 3x = 0.24 \rightarrow x = 0.08$$

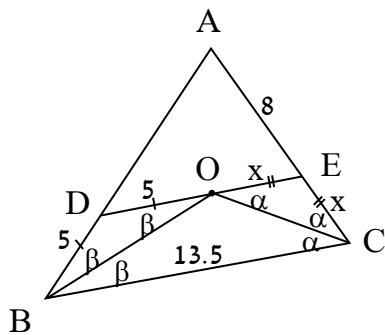
כלומר הטבלה המלאה היא :

סך הכל	לא עלו לגמר ($\bar{A}$)	עלו לגמר (A)	
0.2	0.08	0.12	להיות נשוי (B)
0.8	0.32	0.48	להיות רווק ($\bar{B}$)
1	0.4	0.6	סך הכל

אנו נדרשים לחשב את ההסתברות שאריה היה נשוי בזמן התחרות אם ידוע כי עלה לגמר. זהו רמז **להסתברות מותנית**. במקרים אלו אנחנו צריכים לחלק את ההסתברות למאורע המסוים (ההסתברות שאריה היה נשוי וגם עלה לגמר) בהסתברות של "העולם החדש" והידוע (ההסתברות לעלות לגמר). לפי הטבלה, ההסתברות להיות נשוי וגם לעלות לגמר היא 0.12, וההסתברות לעלות לגמר היא 0.6 :

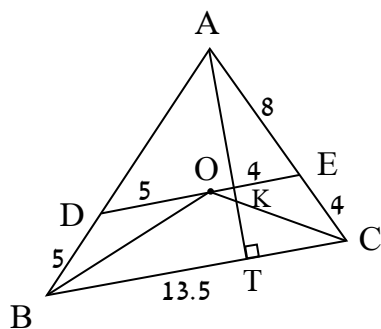
$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = \boxed{0.2}$$

שאלה 4



א. 1. נסמן תחילה את הנתונים בשרטוט ונוסיף את הקטעים BO ו-CO:

נתון	(1) $AE = 8, BD = 5, BC = 13.5$
נתון O מרכז המעגל החסום ב- $\triangle ABC$ ומכאן שהוא מפגש חוצי הזווית במשולש	(2) BO ו-CO חוצי זווית במשולש $\triangle ABC$
סימון	(3) $CE = x, \angle OCB = \alpha, \angle OBC = \beta$
לפי (2) BO ו-CO חוצי זווית במשולש $\triangle ABC$	(4) $\angle ECO = \angle OCB = \alpha$ וגם: $\angle DOB = \angle OBC = \beta$
נתון BCED טרפז	(5) $DE \parallel BC$
זוויות מתחלפות בין המקבילים DE ו-BC	(6) $\angle EOC = \angle OCB = \alpha$ וגם: $\angle DOB = \angle OBC = \beta$
זוויות הבסיס שוות לפי (4) ו-(6)	(7) $\triangle BDO$ ו- $\triangle CEO$ משולשים שווי שוקיים
שוקי המשולשים שוות אורך לפי (7)	(8) $OD = BD = 5$ ו- $OE = CE = x$
משפט תאלס, הרחבה א'	(9) $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{8}{8+x} = \frac{x+5}{13.5} \rightarrow x = 4$
הצבה לפי (9)	(10) $\boxed{CE = 4}$ מש"ל א' 1



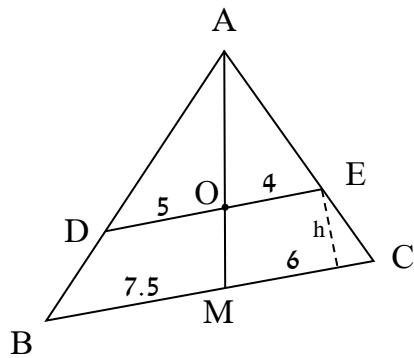
א. 2. בניית עזר: מהקדקוד A נוריד את הגובה לצלע BC. נסמן את נקודות המפגש עם הצלעות DE ו-BC ב-K ו-T בהתאמה.

$$\text{משפט תאלס במשולש } \triangle ATC \quad \frac{AK}{KT} = \frac{AE}{CE} \rightarrow \frac{AK}{KT} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow AK = 2KT \quad (11)$$

כעת נחשב את היחס המבוקש בעזרת הנוסחה לחישוב שטח משולש:

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCO}} = \frac{AK \cdot DE \cdot \frac{1}{2}}{KT \cdot BC \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCO}} = \frac{2KT \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}}{KT \cdot 13.5 \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCO}} = \frac{4}{3} \quad (12)$$

$$\text{מש"ל א' 2} \quad \boxed{\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCO}} = \frac{4}{3}} \quad (13)$$



ב. O מרכז המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ ולכן AM חוצה זווית במשולש.

$$\text{משפט תאלס במשולש } \triangle ABC \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \rightarrow \frac{AD}{5} = \frac{8}{4} \rightarrow AD = 10 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{משפט חוצה זווית במשולש } \triangle ABC \quad \frac{BM}{MC} &= \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{15}{12} \\ \rightarrow \frac{BM}{MC} &= \frac{5}{4} \rightarrow BM = \frac{5}{4} MC \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} BC &= BM + MC \rightarrow 13.5 = \frac{5}{4} MC + MC \\ \text{הצבה לפי (15)} \quad \rightarrow 13.5 &= \frac{9}{4} MC \rightarrow MC = 6, BM = 7.5 \end{aligned} \quad (16)$$

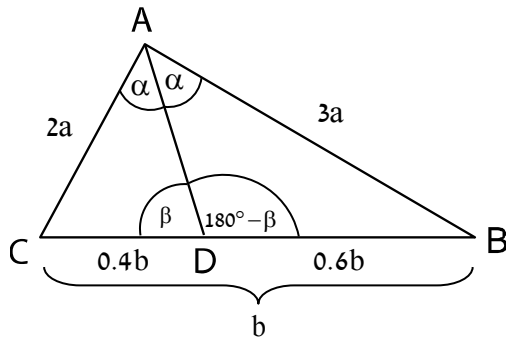
(17) DE ו-BC מקבילים ולכן המרחק ביניהם קבוע. מכאן שגבהי הטרפזים BDOM ו-CEOM זהים ונסמנם ב-h.

כעת נוכל לחשב את היחס המבוקש בעזרת הנוסחה לחישוב שטח טרפז:

$$\frac{S_{BDOM}}{S_{CEOM}} = \frac{(DO + BM) \cdot \frac{h}{2}}{(OE + MC) \cdot \frac{h}{2}} \rightarrow \frac{S_{BDOM}}{S_{CEOM}} = \frac{(5 + 7.5) \cdot \frac{h}{2}}{(4 + 6) \cdot \frac{h}{2}} \rightarrow \frac{S_{BDOM}}{S_{CEOM}} = \frac{12.5}{10} \rightarrow \frac{S_{BDOM}}{S_{CEOM}} = \frac{5}{4} \quad (18)$$

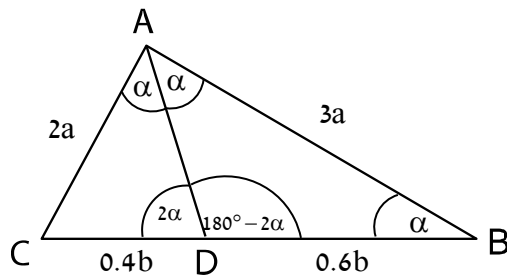
$$\text{מש"ל ב'} \quad \boxed{\frac{S_{BDOM}}{S_{CEOM}} = \frac{5}{4}} \quad (19)$$

שאלה 5:



א. כדי להביע את אורך הקטע AD ניעזר במשפט הקוסינוסים בשני המשולשים $\triangle ACD$ ו- $\triangle ABD$. תחילה נביע את אורכי הקטעים AC, CD ו- BD:

נתון	$BC = b$	(1)
נתון	$AB = 3a$	(2)
נתון + סימון	$\angle CAD = \angle DAB = \alpha$	(3)
נתון	$S_{\triangle ABD} = 1.5 \cdot S_{\triangle ACD}$	(4)
לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש על פי שתי צלעות והזווית שביניהן	$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{3a \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2}$	(5)
לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש על פי שתי צלעות והזווית שביניהן	$S_{\triangle ABD} = \frac{AC \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2}$	(6)
(7) נציב את הביטויים (5) ו- (6) שפיתחנו במשוואה הנתונה (4) ונקבל:		
$\frac{3a \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} = 1.5 \cdot \frac{AC \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} \rightarrow 3a = 1.5AC \rightarrow \boxed{AC = 2a}$		
(8) ניעזר במשפט חוצה הזווית ונביע את אורכם של הקטעים BD ו- CD:		
$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} \rightarrow \frac{2a}{3a} = \frac{CD}{b - CD} \rightarrow 2b - 2CD = 3CD \rightarrow 5CD = 2b \rightarrow \boxed{CD = 0.4b}, \boxed{BD = 0.6b}$		
סימון	$\angle ADC = \beta$	(9)
סכום זוויות צמודות הוא 180°	$\angle ADB = 180^\circ - \beta$	(10)
(11) ניעזר במשפט הקוסינוסים במשולש $\triangle ACD$ כדי להביע את $\cos \beta$:		
$\cos \beta = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} \rightarrow \cos \beta = \frac{AD^2 + (0.4b)^2 - (2a)^2}{2 \cdot 0.4b \cdot AD} \rightarrow \cos \beta = \frac{AD^2 + 0.16b^2 - 4a^2}{0.8b \cdot AD}$		
(12) ניעזר במשפט הקוסינוסים במשולש $\triangle ABD$ כדי להביע את $\cos(180^\circ - \beta)$:		
$\cos(180^\circ - \beta) = \frac{AD^2 + (0.6b)^2 - (3a)^2}{2 \cdot 0.6b \cdot AD} \rightarrow \cos(180^\circ - \beta) = \frac{AD^2 + 0.36b^2 - 9a^2}{1.2b \cdot AD}$		
ניעזר בזהות $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos(\beta)$ ונקבל:		
$-\cos \beta = \frac{AD^2 + 0.36b^2 - 9a^2}{1.2b \cdot AD} \rightarrow \cos \beta = \frac{-AD^2 - 0.36b^2 + 9a^2}{1.2b \cdot AD}$		
(13) נשווה בין הביטויים שקיבלנו ב- (11) ו- (12) ונקבל:		
$\frac{AD^2 + 0.16b^2 - 4a^2}{0.8b \cdot AD} = \frac{-AD^2 - 0.36b^2 + 9a^2}{1.2b \cdot AD} \rightarrow 1.2(AD^2 + 0.16b^2 - 4a^2) = 0.8(-AD^2 - 0.36b^2 + 9a^2) \rightarrow$		
$1.2AD^2 + 0.192b^2 - 4.8a^2 = -0.8AD^2 - 0.288b^2 + 7.2a^2 \rightarrow 2AD^2 = 12a^2 - 0.48b^2 \rightarrow$		
$AD^2 = 6a^2 - 0.24b^2 \rightarrow \boxed{AD = \sqrt{6a^2 - 0.24b^2}}$		



ב. נשרטט את השרטוט עם הנתון החדש :

נתון	$\angle ADC = 2 \cdot \angle DAC \rightarrow \beta = 2\alpha$	(14)
סכום הזוויות במשולש הוא 180°	$\angle ABD = \alpha$	(15)
במשולש, מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות	$AD = BD$	(16)
(17) נשווה בין הביטוי שקיבלנו בסעיף א' עבור הצלע AD לבין הצלע BD :		
$\sqrt{6a^2 - 0.24b^2} = 0.6b \rightarrow 6a^2 - 0.24b^2 = 0.36b^2 \rightarrow 0.6b^2 = 6a^2 \rightarrow b^2 = 10a^2 \rightarrow b = \sqrt{10}a$		
(18) ניעזר במשפט הסינוסים במשולש $\triangle ACD$ ונמצא את גודל הזווית α :		
$\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} \rightarrow \frac{0.4b}{\sin \alpha} = \frac{2a}{\sin 2\alpha} \rightarrow \frac{0.4 \cdot \sqrt{10}a}{\sin \alpha} = \frac{2a}{\sin 2\alpha} \rightarrow 0.4\sqrt{10} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$		
ניעזר בזהות לסינוס זווית כפולה $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ונקבל :		
$0.4\sqrt{10} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{0.4\sqrt{10}} \rightarrow \alpha = 37.76^\circ$		
(19) לבסוף נביע את שטח המשולש $\triangle ACD$ באמצעות הנוסחה לשטח על פי שתי צלעות והזווית שביניהן :		
$S_{\triangle ACD} = \frac{AC \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{2a \cdot 1.89a \cdot \sin 37.76^\circ}{2} \rightarrow S_{\triangle ACD} = 1.16a^2$		

שאלה 6:

א. אחת האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{1 + a \sin^2 x}$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ היא $x = \frac{5\pi}{6}$.

כיוון שלגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית כאשר המכנה מתאפס, נסיק שהערך $x = \frac{5\pi}{6}$ מאפס את

$$1 + a \sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \rightarrow 1 + 0.25a = 0 \rightarrow \boxed{a = -4} \quad \text{המכנה. נציב במכנה } x = \frac{5\pi}{6} \text{ ונשווה אותו ל-0:}$$

על מנת למצוא את שאר האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה נשווה את המכנה ל-0:

$$1 - 4 \sin^2 x \rightarrow 4 \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 0.25 \rightarrow \sin x = \pm 0.5$$

הפתרונות הכלליים של המשוואה הראשונה $\sin x = 0.5$ הם: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ו- $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

הפתרונות הכלליים של המשוואה השנייה $\sin x = -0.5$ הם: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ו- $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$.

נמצא אילו פתרונות נמצאים בתחום $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$, ונקבל כי האסימפטוטות האנכיות הן: $x = \frac{\pi}{6}$ ו- $x = \frac{5\pi}{6}$.

ב. נציב $x = 0$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y:

$$f(0) = \frac{\sin 0}{1 - 4 \sin^2 0} = 0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

נציב $y = 0$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x:

$$0 = \frac{\sin x}{1 - 4 \sin^2 x} \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = \pi k$$

כיוון שהפתרון היחיד בתחום הנתון הוא $x = 0$, נקבל כי נקודת החיתוך היחידה עם הצירים היא: $\boxed{(0,0)}$.

ג. נגזור את הפונקציה $f(x)$ ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 - 4 \sin^2 x) + 8 \sin^2 x \cos x}{(1 - 4 \sin^2 x)^2} = 0 \rightarrow \cos x(1 - 4 \sin^2 x + 8 \sin^2 x) = 0 \rightarrow \cos x(1 + 4 \sin^2 x) = 0$$

למשוואה $1 + 4 \sin^2 x = 0$ אין פתרון כיוון שלא ניתן להוציא שורש ממספר שלילי: ~~$\sin^2 x = -\frac{1}{4}$~~ .

לכן, הפתרון הכללי של המשוואה: $\cos x = 0$ הוא: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

רק הפתרון $x = \frac{\pi}{2}$ נמצא בתחום הנתון ולכן נקודות הקיצון החשודות הן $x = \frac{\pi}{2}$ ו- $x = 0$ בקצה התחום הנתון.

ניעזר בטבלת עליה וירידה ונמצא את סוגן :

תחום x	$x=0$	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6}$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$	$x = \frac{5\pi}{6}$
נציב בנגזרת	קצה	$x = 0.1\pi$		$x = 0.25\pi$	קיצון	$x = 0.7\pi$	
סימן הנגזרת		+		+	0	-	
הפונקציה עולה/יורדת	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

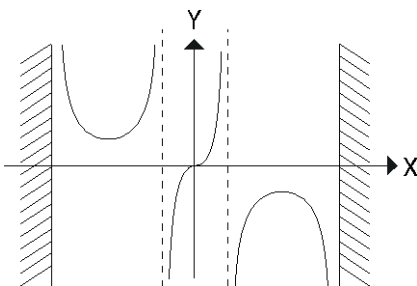
נציב את בפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעורי ה-y של נקודות הקיצון : $\min(0,0)$ ו- $\max\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

ד. כזכור, פונקציה היא אי-זוגית אם מתקיים : $f(-x) = -f(x)$. נראה כי השוויון אכן מתקיים :

נציב בפונקציה את $(-x)$ ונפתח את הביטוי תוך שימוש בזהות : $\sin(-x) = -\sin x$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1-4\sin^2(-x)} = \frac{-\sin(x)}{1-4\sin^2(x)} = -\left[\frac{\sin(x)}{1-4\sin^2(x)} \right] = -f(x)$$

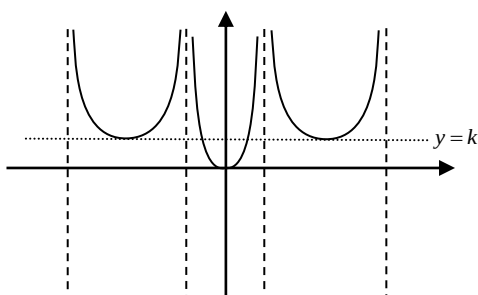
נשרטט תחילה את גרף הפונקציה בתחום הנתון ונשקף אותה באופן "אי זוגי" (אנטי-סימטרי) כדי לקבל את השרטוט המלא :



ה. כזכור, הערך המוחלט הופך מספר שלילי לחיובי (על מספר חיובי הערך המוחלט אינו משפיע). מכאן ניתן להבין כי בפונקציה

$$g(x) = |f(x)|$$

לחיוביים ולמעשה ישוקפו כלפי למעלה :



כעת ניתן לראות כי הישר האופקי $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות בלבד כאשר הוא עובר בשתי נקודות המינימום הימנית והשמאלית. כזכור, נקודת המינימום הימנית של הפונקציה $g(x)$ היא שיקוף של נקודת המקסימום המקורית של הפונקציה $f(x)$. שיעור ה-y של נקודת המקסימום המקורית של

הפונקציה $f(x)$ הוא $-\frac{1}{3}$ ולאחר השיקוף, נקבל ששיעור ה-y של נקודת המינימום הימנית של הפונקציה

$$g(x) \text{ הוא } \frac{1}{3}. \text{ כלומר, הישר } y = k \text{ משיק לגרף הפונקציה } g(x) \text{ בשתי נקודות כאשר } k = \frac{1}{3}.$$

שאלה 7

א. בכדי למצוא את הפונקציה $g(x)$ עלינו לבצע פעמיים אינטגרל לא מסוים על הנגזרת השנייה $g''(x) = 12x - 18$ ולהיעזר בנתונים כדי למצוא את ערכו של הפרמטר c בכל תוצאת אינטגרל.

נבצע אינטגרל פעם אחת ונמצא את $g'(x)$:

$$g'(x) = \int (12x - 18) dx \rightarrow g'(x) = \frac{12x^2}{2} - 18x + c_1 \rightarrow g'(x) = 6x^2 - 18x + c_1$$

לפי הנתון לפונקציה נקודת מקסימום ששיעור ה- x שלה הוא 1 ולכן נציב בנגזרת $x = 1$ ונשווה אותה ל-0 :

$$g'(1) = 6 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 12$$

קיבלנו כי הנגזרת הראשונה היא : $g'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

כעת נבצע אינטגרל פעם נוספת כדי למצוא את הפונקציה $g(x)$:

$$g(x) = \int (6x^2 - 18x + 12) dx \rightarrow g(x) = \frac{6x^3}{3} - \frac{18x^2}{2} + 12x + c_2 \rightarrow g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + c_2$$

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום ששיעור ה- y שלה הוא 10. נמצא תחילה את שיעור ה- x של

נקודת המינימום. נשווה את הנגזרת הראשונה ל-0 : $g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \rightarrow x = 1, x = 2$

נתון שבנקודה $x = 1$ קיימת נקודת מקסימום ומכאן שהנקודה $(2, 10)$ היא נקודת המינימום.

נציב את שיעורי הנקודה בפונקציה $g(x)$ ונמצא את c_2 :

$$10 = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + c_2 \rightarrow c_2 = 6$$

מכאן ש : $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$

ב. מגדירים פונקציה חדשה : $f(x) = \frac{2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 70x + 22 - 4 \cdot g(x)}{2x + 1}$. תחילה נפשט את הביטוי :

נציב בביטוי את התוצאה שקיבלנו בסעיף א' ונקבל :

$$f(x) = \frac{2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 70x + 22 - 4 \cdot (2x^3 - 9x^2 + 12x + 6)}{2x + 1} \rightarrow f(x) = \frac{2x^4 - 17x^3 + 43x^2 + 22x - 2}{2x + 1}$$

נבצע חילוק פולינומים בכדי לפשט את הביטוי ולהיפטר מהמכנה (בעמוד הבא) :

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 9x^2 + 26x - 2 \\
 \hline
 2x^4 - 17x^3 + 43x^2 + 22x - 2 \quad | \quad 2x + 1 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 \\
 \hline
 -18x^3 + 43x^2 + 22x - 2 \\
 \hline
 -18x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 52x^2 + 22x - 2 \\
 \hline
 52x^2 + 26x \\
 \hline
 -4x - 2 \\
 \hline
 -4x - 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

כלומר, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 2$. נשים לב לכך שהמכנה המקורי הצטמצם, ומכאן שלפונקציה $f(x)$

קיימת נקודת אי רציפות סליקה ("חור בגרף") ששיעור ה- x שלה הוא $x = -\frac{1}{2}$. בשרטוט הנתון לגרף ה"דק"

יש נקודת אי רציפות ולכן הוא מתאים לפונקציה $f(x)$, ואילו הגרף ה"עבה" מתאים לפונקציה $g(x)$.

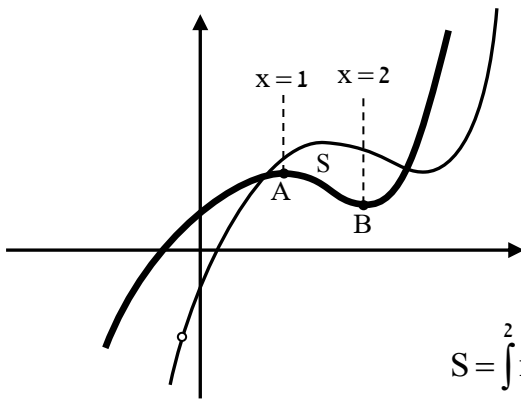
שתי נקודות הקיצון A ו-B נמצאות על הגרף ה"עבה" ולכן הן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

בסעיף א' ראינו כי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ היא: $\min(2, 10)$.

נציב בפונקציה $g(x)$ את שיעור ה- x הנתון של נקודת המקסימום ונקבל:

$$g(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 6 \rightarrow \max(1, 11)$$

כלומר, קיבלנו את הנקודות: $A(1, 11)$ ו- $B(2, 10)$.



ג. השטח המבוקש כלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ מלמעלה, ובין

גרף הפונקציה $g(x)$ מלמטה בתחום שבין $x=1$ ו- $x=2$.

נחשב את האינטגרל המתאים ונמצא את השטח:

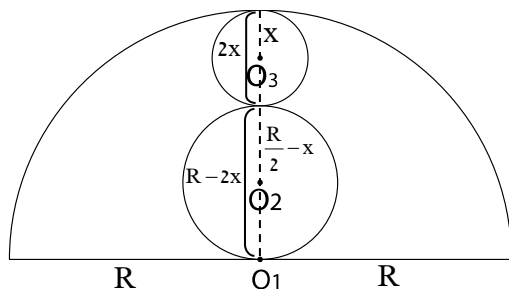
$$S = \int_1^2 f(x) - g(x) dx = \int_1^2 x^3 - 9x^2 + 26x - 2 - (2x^3 - 9x^2 + 12x + 6) dx$$

נסדר את הביטוי שבתוך האינטגרל ונקבל:

$$\int_1^2 (-x^3 + 14x - 8) dx \rightarrow S = \left. \frac{-x^4}{4} + \frac{14x^2}{2} - 8x \right|_1^2 \rightarrow S = \left(\frac{-2^4}{4} + \frac{14 \cdot 2^2}{2} - 8 \cdot 2 \right) - \left(\frac{-1^4}{4} + \frac{14 \cdot 1^2}{2} - 8 \cdot 1 \right)$$

$$S = 8 - (-1.25) \rightarrow \boxed{S = 9.25 \text{ יח"ר}}$$

שאלה 8:



א. זוהי בעיית ערך קיצון גיאומטרית. נסמן את רדיוס המעגל O_1 בפרמטר R שהוא גודל קבוע שאינו משתנה. נסמן את רדיוס המעגל O_3 במשתנה x ונביע באמצעותו את פונקציית המטרה המתארת את **סכום שטחי המעגלים** O_2 ו- O_3 .

נשים לב כי מרכזי שלושת המעגלים נמצאים על ישר אחד ומכאן שניתן להביע את קוטר המעגל O_2 בעזרת חיסור קטעים. קוטר המעגל O_2 שווה לחיסור קוטר המעגל הקטן מרדיוס המעגל הגדול ולכן אורכו: $R - 2x$.

אורך הרדיוס שווה למחצית מאורך הקוטר ולכן רדיוס המעגל O_2 הוא: $\frac{R-2x}{2} = \frac{R}{2} - x$.

כעת נביע את פונקציית המטרה המתארת סכום שטחי המעגלים O_2 ו- O_3 : $f(x) = \pi x^2 + \pi \left(\frac{R}{2} - x \right)^2$.

עלינו למצוא את ערכו של x עבורו סכום השטחים מינימלי ולכן נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x) = 2\pi x - 2\pi \left(\frac{R}{2} - x \right) = 0 \rightarrow 2\pi x - \pi R + 2\pi x = 0 \rightarrow 4\pi x = \pi R \rightarrow \boxed{x = \frac{R}{4}}$$

ניעזר בנגזרת השנייה כדי לבדוק האם הנקודה היא אכן נקודת מינימום: $f''(x) = 4\pi > 0$.

הנגזרת השנייה חיובית ומכאן שסכום השטחים מינימלי כאשר $x = \frac{R}{4}$.

נציב את $x = \frac{R}{4}$ בפונקציית המטרה המתארת את סכום שטחי המעגלים ונביע את סכום השטחים

$$f\left(\frac{R}{4}\right) = \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{R}{2} - \frac{R}{4}\right)^2 \rightarrow f\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{\pi R^2}{8} \quad \text{באמצעות } R$$

כלומר סכום השטחים המינימלי של שני המעגלים הוא: $\frac{\pi R^2}{8}$.

לפי הנתון סכום השטחים שווה ל- 8π סמ"ר. נשווה בין הביטוי שקיבלנו לנתון ונמצא את R :

$$\frac{\pi R^2}{8} = 8\pi \rightarrow \pi R^2 = 64\pi \rightarrow R^2 = 64 \rightarrow \boxed{R = 8 \text{ ס"מ}}$$