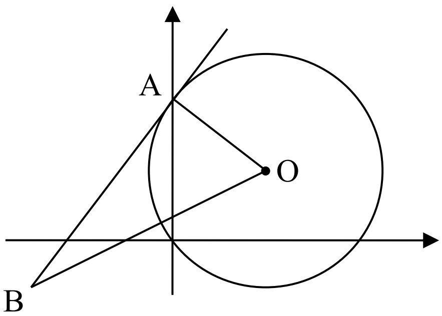
שאלון 481 - מבחן 4

פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה - 20 נקודות).

1. מירה וגיא יצאו בו זמנית מהנקודה A לנקודה B, שהמרחק ביניהן 180 ק״מ. מהירותה של מירה גבוהה ב-15 קמ״ש מזו של גיא, אך בגלל שמירה עצרה להפסקה למשך שעה, הגיעו השניים יחד לנקודה B.
   א. חשב את מהירותה של מירה.
   ב. כשהגיעו לנקודה B מיד הסתובבו והחלו לנסוע בחזרה ל-A. מהירותה של מירה בדרך חזרה היתה נמוכה ב-25% ממהירותה בדרך הלוך. מהירותו של גיא בדרך חזרה היתה גבוהה ב-20% ממהירותו בדרך הלוך. מצא כעבור כמה זמן לאחר הגעתו של גיא לנקודה A, הגיעה גם מירה לנקודה A.

2. נתון מעגל שהיקפו 10π יח׳ ומרכזו בנקודה O ברביע הראשון. המעגל עובר דרך ראשית הצירים וחותך את ציר ה-y בנקודה A. שיעור ה-y של הנקודה O הוא 3. הנקודה B נמצאת ברביע השלישי.

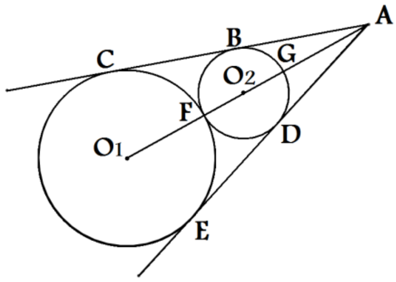


משוואת הישר המשיק למעגל בנקודה A היא: $y = \frac{4}{3}x + 6$.
   א. מצא את:
      1. שיעורי הנקודה O.
      2. משוואת המעגל.
   ב. הקטע BO הוא קוטר של מעגל שני שמרכזו בנקודה $(0.5\ ,\ -1)$.
      1. מצא את שיעורי הנקודה B.
      2. קבע האם הנקודה A נמצאת על המעגל השני, בתוכו או מחוץ לו. נמק.

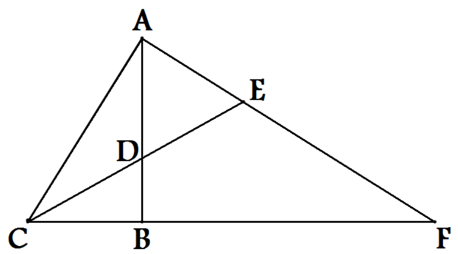
3. בצוות ההוראה בתיכון מסוים, מספר המורות גדול פי 1.5 ממספר המורים.
   25% מצוות ההוראה יוצאים לטיול השנתי. $\frac{2}{3}$ מהמורות לא יוצאות לטיול השנתי.
   בוחרים באקראי מורה (גבר או אישה) מצוות ההוראה.
   א. מהי ההסתברות שנבחר גבר שלא יוצא לטיול השנתי?
   ב. ידוע שהמורה הנבחר (גבר או אישה) יוצא לטיול השנתי. מה ההסתברות שנבחרה אישה?
   ג. בתיכון עובדים 120 מורים ומורות בסך הכל. כמה מורות וכמה מורים יצאו לטיול השנתי?
   ד. הטיול השנתי נמשך חמישה ימים. בכל יום בוחרים באקראי מורה (גבר או אישה) שיהיה אחראי על ארוחת הצהריים. יתכן שאותו בן אדם יבחר יותר מפעם אחת.
   מהי ההסתברות שלכל היותר ביומיים מהטיול, האחראי יהיה גבר?

פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נק׳)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.



4. שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 משיקים זה לזה בנקודה F.
רדיוס המעגל שמרכזו O_1 ארוך פי שניים מרדיוס המעגל שמרכזו O_2.
מהנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגלים בנקודות B, C, D
ו-E. הישר העובר דרך O_1 ו- O_2 חותך את המעגל O_2 בנקודה G.
א. הוכח: הקטע AG שווה באורכו לרדיוס המעגל שמרכזו O_1.
ב. נתון: היקף הדלתון ACO_1E הוא 40 ס״מ.
חשב את היקף הדלתון ABO_2D.

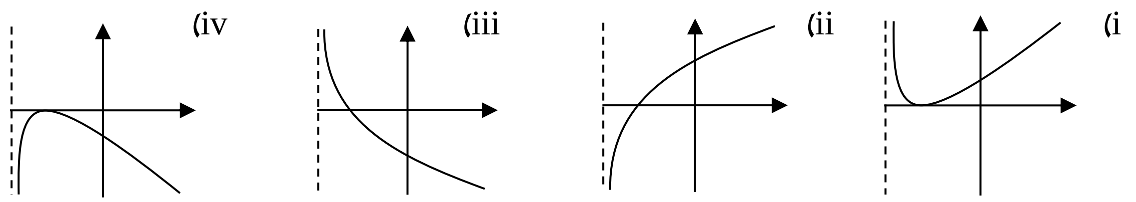


5. במשולש ΔACF חוצה הזווית CE והגובה AB נחתכים בנקודה D.
נתון: $\sphericalangle CAF = 90°$. נסמן: $\sphericalangle ACB = 2\alpha$, $BC = b$.
א. נתון: $BF = 3BC$. חשב את α.
ב. הוכח שהמשולש ΔADE הוא שווה צלעות.
ג. נתון שהיקף המשולש ΔADE הוא $10\sqrt{3}$ ס״מ.
מצא את b.

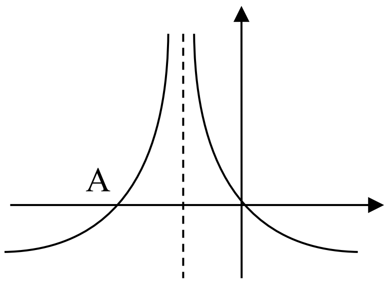
פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה - 20 נקודות).

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\cdot\sqrt{x+8}-x$.
א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצא את:
1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן, אם ויש כאלו.
3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם ויש כאלו.
4. תחומי עלייה וירידה.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הנגזרת $f'(x)$?



7. נתונים ארבעה מספרים חיוביים.
המספר השני גדול מהראשון ב-6. המספר השלישי קטן מהראשון ב-6.
המספר הרביעי קטן מהראשון ב-10.
עורכים את החישוב הבא: מכפילים את המספר השני בשלישי ומחלקים את התוצאה במספר הרביעי.
מצא את המספר הראשון שעבורו תוצאת החישוב היא מינימלית.



8. נתון גרף הנגזרת: $f'(x)=\frac{9}{(x+3)^2}+b$ החותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה A.
א. מצא את b.
ב. הצב $b=-1$ ומצא את שיעורי הנקודה A.
ג. מצא את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
ד. נתון שהפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים. מצא את:
1. הביטוי האלגברי של הפונקציה $f(x)$.
2. שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.
ה. שרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$.

בהצלחה!

תשובות:

1) א. 60 קמ"ש. **ב.** 40 דקות.

2) א. 1) $O(4,3)$. **2)** $(x-4)^2+(y-3)^2=25$. **ב. 1)** $B(-6,-2)$. **ג.** על המעגל השני.

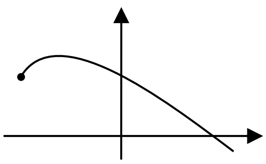
3) א. 0.35. **ב.** $\frac{4}{5}$. **ג.** 6 מורים ו- 24 מורות. **ד.** 0.942.

4) ב. 20 ס"מ.

5) א. $\alpha=30°$. **ג.** $b=5$.

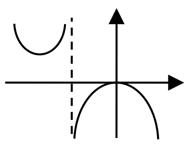
6) א. 1) $-8\le x$. **2)** בקצה: $\min(-8,8)$, פנימית: $\max(-7,9)$. **3)** $(8,0)$, $(0,5.66)$.

4) עולה: $-8<x<-7$; יורדת: $x>-7$. **ב.** השרטוט משמאל. **ג.** iii.



7) 18.

8) א. $b=-1$. **ב.** $A(-6,0)$. **ג.** שיעור ה- x של נקודת המינימום הוא -6, שיעור ה- x של נקודת המקסימום הוא 0. **ד. 1)** $f(x)=-\frac{9}{x+3}-x+3$. **2)** 12. **ה.**



פתרון מלא - מבחן 4

שאלה 1:

א. נמלא את הנתונים בטבלה:
נשאלנו על מהירותה של מירה ולכן נסמן אותה ב-x.
נתון כי מהירותה גבוהה ב-15 קמ״ש ממהירותו של גיא ולכן
נסמן את מהירותו של גיא ב: $x-15$.
כל אחד מהם עבר מרחק של 180 ק״מ. נרשום זאת בטבלה.
נחלק את המרחק שעברה מירה במהירות בה נסעה ונקבל את
משך זמן נסיעתה: $\frac{180}{x}$.

	מהירות	זמן	דרך
מירה (נסיעה)	x	$\frac{180}{x}$	180
מירה (מנוחה)	0	1	0
גיא (נסיעה)	$x-15$	$\frac{180}{x-15}$	180

נמלא שורה נוספת עבור השעה שבה מירה נחה, כדי שנזכור להשתמש בנתון זה כאשר נרכיב משוואה.
כעת נחלק את המרחק שעבר גיא במהירותו ונקבל את זמן נסיעתו: $\frac{180}{x-15}$.
כעת נרכיב משוואה:

מירה וגיא יצאו **באותו הזמן** מהנקודה A והגיעו **באותו הזמן** לנקודה B. עם זאת, מירה נחה ו<u>לא נסעה</u> במשך שעה אחת.
ומכאן שזמן <u>נסיעתו</u> של גיא ארוך בשעה אחת מזמן <u>נסיעתה</u> של מירה. מכאן מתקבלת המשוואה:

$$\frac{180}{x-15}=1+\frac{180}{x} \quad /\cdot x(x-15) \quad \rightarrow \quad 180x=x(x-15)+180(x-15)$$

נפתח סוגריים ונכנס איברים: $x^2-15x-2700=0$. פתרונות המשוואה הם: $x=60$ ו- $\cancel{x=-45}$.
מכיוון שמהירות היא תמיד חיובית, נקבל כי מהירותה של מירה היא: $\boxed{60 \text{ קמ״ש}}$.

ב. בסעיף א׳ מצאנו כי מהירותה של מירה בהלוך היתה 60 קמ״ש ומהירותו של גיא בהלוך היתה 45 קמ״ש.
נמלא את הנתונים החדשים על הדרך חזרה בטבלה:
מהירותה של מירה בדרך חזרה היתה נמוכה ב- $p=25\%$ ממהירותה בדרך הלוך.
ניעזר בנוסחה הבסיסית לעבודה עם p אחוזים: $\boxed{\text{ערך חדש} = \text{הערך הקודם} \bullet \left(1\pm\frac{p}{100}\right)}$

נציב ונקבל כי מהירותה החדשה של **מירה** היא:

$$v=\left(1-\frac{25}{100}\right)\cdot 60 \rightarrow v=0.75\cdot 60 \rightarrow \boxed{v=45 \text{ קמ״ש}}$$

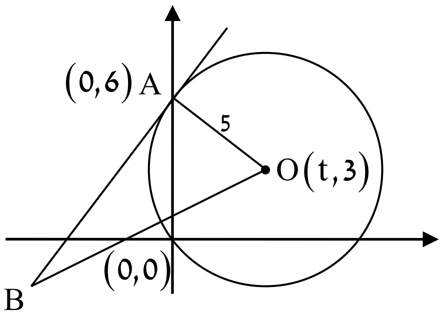
באותו האופן נחשב את מהירותו החדשה של **גיא**:

$$v=\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot 45 \rightarrow v=1.2\cdot 45 \rightarrow \boxed{v=54 \text{ קמ״ש}}$$

	מהירות	זמן	דרך
מירה (דרך חזרה)	45		180
גיא (דרך חזרה)	54		180

נחלק את הדרך שעבר כל אחד מהם בזמן במהירותו ונקבל את זמן הנסיעה:
זמן נסיעתה של מירה: $\frac{180}{45}=4$ שעות. זמן נסיעתו של גיא: $\frac{180}{54}=3\frac{1}{3}$ שעות
ומכאן שפער הזמנים ביניהם היה: $4-3\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ שעות. נעביר את הפתרון לדקות ונקבל: $\frac{2}{3}\cdot 60=40$ דקות.
כלומר, מירה הגיעה לנקודה A $\boxed{40 \text{ דקות}}$ לאחר גיא.

שאלה 2:



א.1. נתון כי היקף המעגל הוא 10π יח'. ניעזר בנוסחה לחישוב היקף מעגל: $P = 2\pi \cdot R$ ונמצא את אורך רדיוס המעגל:

$$2\pi \cdot R = 10\pi \rightarrow 2R = 10 \rightarrow \boxed{R = 5}$$

משוואת המשיק למעגל בנקודה A היא: $y = \frac{4}{3}x + 6$.

הנקודה A היא גם נקודת החיתוך עם ציר ה-y ולכן נציב במשוואת המשיק $x = 0$ ונמצא את שיעורי הנקודה A:

$$y = \frac{4}{3} \cdot 0 + 6 \rightarrow y = 6 \rightarrow \boxed{A(0,6)}$$

בנוסף נתון ששיעור ה-y של מרכז המעגל הוא 3 ולכן נסמן: $O(t,3)$.

כעת נביע באמצעות t את המרחק בין מרכז המעגל לבין הנקודה A ונשווה לאורך הרדיוס שמצאנו:

$$5 = \sqrt{(t-0)^2 + (3-6)^2} \rightarrow 25 = t^2 + (-3)^2 \rightarrow t^2 = 16 \rightarrow t_1 = 4\ ,\ \cancel{t_2 = -4}$$

וכיוון שנתון שהנקודה O ברביע הראשון נפסול את הפתרון השלילי ונסיק ש: $\boxed{O(4,3)}$.

א.2. כעת יש בידנו את שיעורי מרכז המעגל $O(4,3)$ ואת הרדיוס $R = 5$ ומכאן שמשוואת המעגל היא:

$$\boxed{(x-4)^2 + (x-3)^2 = 25}$$

ב.1. הקטע BO הוא קוטר של מעגל שני שמרכזו בנקודה $(-1,0.5)$.

כיוון ש-BO קוטר, מרכז זה נמצא במרחק שווה מהנקודות B ו-O הנמצאות בקצוות הקטע.
לכן נוכל למצוא את שיעורי הנקודה B בעזרת הנוסחה למציאת אמצע קטע באופן הבא:

$$\frac{x_B + x_O}{2} = -1 \rightarrow \frac{x_B + 4}{2} = -1 \rightarrow x_B + 4 = -2 \rightarrow x_B = -6$$

$$\frac{y_B + y_O}{2} = 0.5 \rightarrow \frac{y_B + 3}{2} = 0.5 \rightarrow y_B + 3 = 1 \rightarrow y_B = -2$$

לכן, שיעורי הנקודה B הם: $\boxed{B(-6,-2)}$.

ב.2. נשים לב שהקטע BO הוא קוטר המעגל <u>השני</u> וכל זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
מכאן שאם הנקודה A נמצאת על המעגל, אז הזווית $\measuredangle BAO$ היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר BO ולכן היא זווית ישרה. לעומת זאת, אם הנקודה A נמצאת <u>בתוך</u> המעגל אז הזווית $\measuredangle BAO$ חייבת להיות <u>גדולה</u> מ- $90°$ ואם הנקודה A <u>מחוץ</u> למעגל אז הזווית $\measuredangle BAO$ בהכרח <u>קטנה</u> מ- $90°$.

לפי הנתון בשאלה, הנקודה A היא נקודת ההשקה של המשיק AB והמעגל המופיע בשרטוט.
ידוע שמשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה ולכן: $AB \perp AO$ כלומר: $\measuredangle BAO = 90°$.
מצאנו שהזווית $\measuredangle BAO$ היא זווית ישרה ולכן מהשיקולים שהצגנו קודם הזווית $\measuredangle BAO$ היא בהכרח זווית היקפית ו<u>הנקודה A נמצאת על המעגל</u>.

שאלה 3:

נפתור את התרגיל בעזרת טבלה דו-מימדית:

בצוות ההוראה בתיכון מסוים, מספר המורות גדול פי 1.5 ממספר המורים. נסמן את מספר המורים ב- x ולכן מספר המורות הוא: $1.5x$.
כמו כן 25% מכלל הצוות יוצאים לטיול השנתי ולכן 75% אינם.

	מורים	מורות	סה"כ
יצאו לטיול			0.25
לא יצאו			0.75
סה"כ	x	$1.5x$	1

נסכום את מספר המורים והמורות לפי הטבלה ונקבל:

$x+1.5x=1 \rightarrow 2.5x=1 \rightarrow x=0.4$

לכן 40% מהצוות הם מורים ו- 60% הן מורות.

כמו כן, נתון ש- $\frac{2}{3}$ מהמורות לא יוצאות לטיול השנתי ולכן חלקם מכלל המורות בצוות ההוראה הוא: $\frac{2}{3}\cdot 0.6=0.4$.

	מורים	מורות	סה"כ
יצאו לטיול			0.25
לא יצאו		0.4	0.75
סה"כ	0.4	0.6	1

כעת בידינו מספיק נתונים על מנת להשלים את שאר התאים בטבלה:

	מורים	מורות	סה"כ
יצאו לטיול	0.05	0.2	0.25
לא יצאו	0.35	0.4	0.75
סה"כ	0.4	0.6	1

א. לפי התא המתאים בטבלה, ההסתברות לבחור באקראי גבר שלא יצא לטיול מקרב כל צוות ההוראה היא: $\boxed{0.35}$.

ב. נתון שנבחר מהצוות מורה (גבר או אישה) שיוצא לטיול ורוצים לדעת מה ההסתברות שנבחרה אישה.
נסמן: A = נבחרה אישה. B = יוצא לטיול.
נציב בנוסחה למציאת הסתברות מותנית ונקבל שההסתברות המבוקשת היא:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.25}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

ג. בתיכון עובדים 120 מורים בסך הכל. לפי הטבלה שהרכבנו המורים שיצאו לטיול מהווים 5% מכלל הצוות והמורות שיצאו מהוות 20% מכלל הצוות. מכאן שמספרם של המורים הוא: $0.05\cdot 120=6$ ומספר המורות הוא: $120\cdot 0.2=24$. כלומר <u>לטיול יצאו 6 מורים ו-24 מורות</u>.

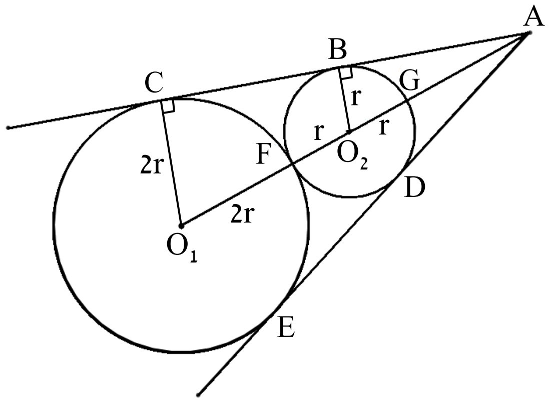
ד. זהו סעיף הנפתר בעזרת נוסחת ברנולי: $P=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ כאשר כל בחירה של מורה היא ניסוי והצלחה מוגדרת להיות "נבחר גבר". מבצעים את התהליך 5 פעמים ולכן ישנם 5 ניסיונות: $n=5$.
אנו מעוניינים להצליח <u>לכל היותר</u> 2 פעמים, לכן: $k=0,1,2$.

כמו כן, לפי הטבלה החלק <u>היחסי</u> של הגברים מקרב כלל אלו <u>שיצאו לטיול</u> הוא: $\frac{0.05}{0.25}=0.2$ ולכן נסמן: $p=0.2$.

נציב את הנתונים בנוסחת ברנולי ונקבל את ההסתברות המבוקשת:

$$P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=\binom{5}{0}\cdot 0.2^0\cdot 0.8^5+\binom{5}{1}\cdot 0.2^1\cdot 0.8^4+\binom{5}{2}\cdot 0.2^2\cdot 0.8^3=\boxed{0.94208}$$

שאלה 4:

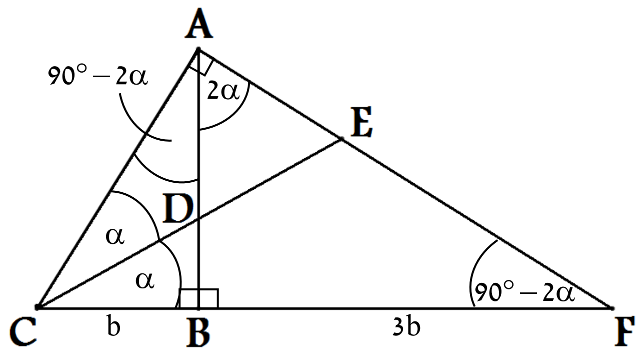


א. ניעזר בשתי בניות עזר של רדיוסים בשני המעגלים ונראה כי מתקיים משפט תאלס במשולש: ΔACO_1

1)	$O_1C \perp AC$	רדיוס ומשיק מאונכים זה לזה בנקודת ההשקה
2)	$O_2B \perp AC$	רדיוס ומשיק מאונכים זה לזה בנקודת ההשקה
3)	$O_1C = 2 \cdot O_2B$	נתון
4)	O_2F רדיוס במעגל הקטן O_1F רדיוס במעגל הגדול	ישר המחבר שני מרכזי מעגלים עובר דרך נקודת ההשקה שלהם.
5)	$O_2G = O_2B = O_2F = r$	סימון
6)	$O_1F = O_1C = 2r$	סימון + לפי (3)
7)	$O_2B \parallel O_1C$	לפי (1) ו- (2)
8)	$\frac{AB}{AC} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{BO_2}{CO_1} \rightarrow \boxed{\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{BO_2}{CO_1}}$	תאלס הרחבה א׳ במשולש: ΔACO_1
9)	$\frac{AG+r}{AG+4r} = \frac{r}{2r} \rightarrow 2AG + 2r = AG + 4r \rightarrow$ $\boxed{AG = 2r}$	הצבה: $AO_2 = AG + r$, $AO_1 = AG + 4r$ (ראה שרטוט), צמצום וכפל בהצלבה.

ב.	נשים לב כי $AE = AC$ ו- $AB = AD$	שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה
10)	$P_{ACO_1E} = AC + AE + CO_1 + EO_1 =$ $2AC + 4r =$ 40 ס״מ	הצבה בחישוב היקף הדלתון
11)	$2AC + 4r = 40 \rightarrow \boxed{AC = 20 - 2r}$	חישוב
12)	$P_{ABO_2D} = AB + AD + BO_2 + DO_2 = 2AB + 2r$	הצבה בחישוב היקף דלתון.
13)	$\frac{AB}{AC} = \frac{BO_2}{CO_1} \rightarrow \frac{AB}{20-2r} = \frac{r}{2r} \rightarrow 2AB = 20 - 2r$	תאלס הרחבה א, לפי (8)
14)	$2AB = 20 - 2r \rightarrow \boxed{AB = 10 - r}$	חישוב
15)	$P_{ABO_2D} = 2AB + 2r = 2(10 - r) + 2r =$ $\boxed{\text{20 ס״מ}}$	הצבת (14) ב-(11).

שאלה 5:



א. הישר CE חוצה את זווית $\sphericalangle ACF$ ולכן נסמן: $\sphericalangle ACE=\sphericalangle ECF=\alpha$.
כמו כן נתון כי: $\sphericalangle CAF=\sphericalangle ABC=\sphericalangle ABF=90^\circ$.
נתון כי $BF=3BC$. נסמן $BC=b$ ומכאן: $BF=3b$
נשלים את כל הזוויות במשולש:

1)	$\sphericalangle CAB=90^\circ-2\alpha$	סכום הזוויות במשולש ΔABC הוא 180°
2)	$\sphericalangle BAF=90^\circ-(90^\circ-2\alpha)=2\alpha$	חיסור זוויות
3)	$\sphericalangle AFC=90^\circ-2\alpha$	סכום הזוויות במשולש ΔABF הוא 180°

4) ניעזר בכך ש-AB היא צלע משותפת לשני המשולשים ΔABC ו- ΔABF ונחשב באמצעות טריגונומטריה

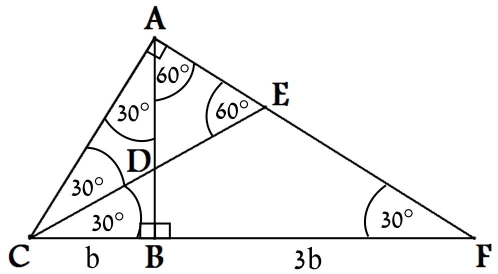
במשולש ישר זווית. נזכור כי: $\tan\alpha=\frac{\text{ניצב מול הזווית}}{\text{ניצב ליד הזווית}}$ ונקבל:

במשולש ΔABC:
$$\tan(2\alpha)=\frac{AB}{b}\ \rightarrow\ AB=b\cdot(2\alpha)$$

במשולש ΔABF:
$$\tan(2\alpha)=\frac{3b}{AB}\ \rightarrow\ AB\tan(2\alpha)=3b\ \rightarrow\ AB=\frac{3b}{\tan(2\alpha)}$$

נשווה בין הביטויים של הצלע המשותפת AB ונקבל:
$$b\cdot\tan(2\alpha)=\frac{3b}{\tan(2\alpha)}\ /\cdot\tan(2\alpha)\ \rightarrow \cancel{b}\tan^2(2\alpha)=3\cancel{b}\ /\sqrt{\ }\ \rightarrow \tan 2\alpha=\sqrt{3}\rightarrow 2\alpha=60^\circ\rightarrow \boxed{\alpha=30^\circ}$$
(פסלנו את הפתרון: $\tan 2\alpha=-\sqrt{3}$ מכיוון שבמקרה זה הזווית α יוצאת שלילית או 60° וזה לא ייתכן).

ב. נשלים את הזוויות בשרטוט:
כעת נשים לב כי: $\sphericalangle AEC=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ$
(סכום זוויות במשולש ΔACE).
לבסוף נראה כי: $\sphericalangle ADE=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$
(סכום זוויות במשולש ΔADE).
ומכאן: $\sphericalangle DAE=\sphericalangle AED=\sphericalangle EDA=60^\circ$ **מ.ש.ל**



ג. נתון שהיקף המשולש ΔADE הוא $10\sqrt{3}$ ס״מ.

$AD=\frac{10\sqrt{3}}{3}=$ 5.77 ס״מ	במשולש שווה צלעות, כל הצלעות שוות זו לזו.
ΔDAC הוא משולש שווה שוקיים ולכן:	(זוויות הבסיס שוות)
$AD=DC=$ 5.77 ס״מ	שוקיים שוות במשולש שווה השוקיים ΔADC

ניעזר בטריגונומטריה במשולש ישר הזווית ΔBDC ונקבל:
$$\cos\sphericalangle DCB=\frac{BC}{CD}\ \rightarrow\ \cos 30^\circ=\frac{b}{5.77}\ \rightarrow\ b=5.77\cos 30^\circ\ \rightarrow\ \boxed{b=5\text{ ס״מ}}$$

שאלה 6:

נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x+8}-x$.

א. 1. נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: $0\le x+8 \ \rightarrow\ \boxed{-8\le x}$

2. נגזור את הפונקציה: $f'(x)=\cancel{2}\cdot\frac{1\cdot 1}{\cancel{2}\sqrt{x+8}}-1=\frac{1}{\sqrt{x+8}}-1$

נשווה את הנגזרת ל-0 למציאת שיעורי הנקודות החשודות בקיצון:

$$f'(x)=0\ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{x+8}}-1=0\ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{x+8}}=1\ \rightarrow\ 1=\sqrt{x+8}\ \ /(\ )^2\ \rightarrow\ 1=x+8\ \rightarrow\ x=-7$$

נציב את הנקודה החשודה יחד עם נקודת קצה התחום $x=-8$ בטבלת עלייה וירידה כדי לקבוע את סוג הקיצון:

תחום x	$x=-8$	$-8<x<-7$	$x=-7$	$-7<x$
נציב בנגזרת	קצה	-7.5	קיצון	0
סימן הנגזרת		+		-
הפונקציה עולה/יורדת	min	↗	max	↘

נציב את נקודות הקיצון בפונקציה המקורית ונמצא את שיעור ה-y שלהן:

$f(-8)=2\sqrt{-8+8}-(-8)=8$ $\qquad$ $f(-7)=2\sqrt{-7+8}-(-7)=9$

כלומר, שיעורי נקודת הקיצון הם: $\boxed{\min(-8,8)\ ,\ \max(-7,9)}$.

3. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y: $\boxed{(0,5.66)}\ \leftarrow\ f(0)=2\sqrt{0+8}-0=5.66$

נקודות החיתוך עם ציר ה-x:

$$f(x)=0\ \rightarrow\ 2\sqrt{x+8}-x=0\ \rightarrow\ 2\sqrt{x+8}=x\ \ /(\ )^2\ \rightarrow\ 4(x+8)=x^2\ \rightarrow\ x^2-4x-32=0$$

$$\rightarrow\ x_1=-4\ ,\ x_2=8$$

כיוון שהעלנו את המשוואה בריבוע נבדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה המקורית $2\sqrt{x+8}=x$:

$x_1=-4:\quad 2\sqrt{-4+8}=-4\ \rightarrow\ 4\ne -4$

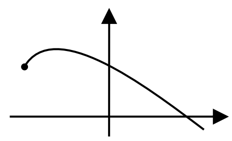
$x_2=8:\quad 2\sqrt{8+8}=8\ \rightarrow\ 8\ne 8$

ומכאן שרק הפתרון $x_2=8$ מתאים ולכן נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה-x היא: $\boxed{(8,0)}$.

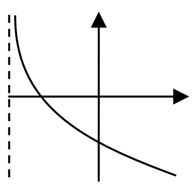
4. לפי טבלת העלייה והירידה נסיק ש:

תחום העלייה של הפונקציה הוא: $\boxed{-8<x<-7}$. תחום הירידה של הפונקציה הוא: $\boxed{-7<x}$.

ב.



ג. כדי לזהות את גרף הנגזרת המתאים ניעזר בטבלת העלייה והירידה:



בתחום: $-7<x$ הנגזרת <u>שלילית</u> כלומר <u>הגרף שלה מתחת לציר ה-x</u>.

בתחום: $-8<x<-7$ הנגזרת <u>חיובית</u> כלומר <u>הגרף שלה מעל לציר ה-x</u>.

מבין הגרפים האפשריים היחיד שמתאים לתיאור זה הוא גרף iii.

שאלה 7:

זוהי בעיית ערך קיצון. בשאלות מסוג זה נפעל תמיד לפי ארבעת השלבים הבאים:

1. **הרכבת "פונקציית המטרה" וכתיבתה תוך שימוש בנעלם אחד בלבד.**
2. **מציאת שיעורי הנקודות החשודות כנקודות קיצון**, על ידי גזירת פונקציית המטרה והשוואת הנגזרת ל-0.
3. **קביעת סוג הנקודות** (מינימום/מקסימום), באמצעות טבלת עלייה וירידה או באמצעות הנגזרת השנייה.
4. **בדיקה מחדש: "מה ביקשו בשאלה?"** ומציאת התשובה בהתאם לנקודת הקיצון שמצאנו.

ראשית נביע את ארבעת המספרים באמצעות משתנה יחיד x:

נסמן את המספר הראשון: x.

המספר השני גדול מהראשון ב-6 ולכן נסמן אותו: $x+6$.

המספר השלישי קטן מהראשון ב-6 ולכן נסמן אותו: $x-6$.

המספר הרביעי קטן מהראשון ב-10 ולכן נסמן אותו: $x-10$.

כעת נרכיב את פונקציית המטרה המתארת את מכפלת המספר השני בשלישי וחלוקת התוצאה במספר הרביעי:

$$f(x)=\frac{(x+6)(x-6)}{x-10}=\frac{x^2-36}{x-10}$$

נגזור את פונקציית המטרה ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-10)-1\cdot(x^2-36)}{(x-10)^2}=0 \;\rightarrow\; 2x^2-20x-x^2+36=0 \;\rightarrow\; x^2-20x+36=0$$

פתרונות המשוואה הם: $x=18$ ו- $x=2$. איננו יודעים אם מדובר בנקודות מקסימום או מינימום ולכן נציב את הנקודות החשודות כנקודות קיצון בטבלת עלייה וירידה ונמצא את סוגן:

תחום x	$x<2$	$x=2$	$2<x<18$	$x=18$	$18<x$
נציב בנגזרת	1	קצה	4	קיצון	20
סימן הנגזרת	+		-		+
הפונקציה עולה/יורדת	↗	max	↘	min	↗

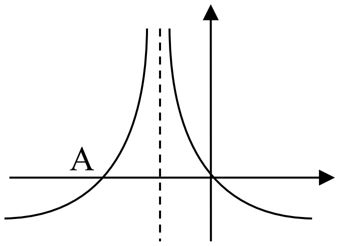
נתבקשנו למצוא את המספרים עבורם המנה שחושבה היא מינימלית ולכן הפתרון המתאים הוא: $\boxed{x=18}$.

כעת נחזור ונמצא את ארבעת המספרים כפי שהגדרנו אותם:

המספר הראשון: $x=18$, השני: $18+6=24$, השלישי: $18-6=12$ והרביעי: $18-10=8$.

לסיכום ארבעת המספרים הם: 18,24,12,8.

שאלה 8:



נתון גרף הנגזרת: $f'(x)=\frac{9}{(x+3)^2}+b$ החותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה A.

א. גרף הנגזרת עובר בראשית הצירים ולכן מקיים: $f'(0)=0$.
נציב ונמצא את b:

$$f'(0)=0 \rightarrow 0=\frac{9}{(0+3)^2}+b \rightarrow 0=\frac{9}{9}+b \rightarrow 0=1+b \rightarrow \boxed{b=-1}$$

ב. הנקודה A היא נקודת החיתוך השנייה <u>שאינה ראשית הצירים</u> של הגרף עם ציר ה-x.
נשווה את הנגזרת לאפס כדי למצוא אותה:

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{9}{(x+3)^2}-1=0 \rightarrow \frac{9}{(x+3)^2}=1 \rightarrow 9=(x+3)^2 \;\; /\sqrt{\;} \rightarrow \pm 3=x+3 \rightarrow x_1=0\;,\; x_2=-6$$

וכיוון שאנו יודעים שלא מדובר על ראשית הצירים נסיק ששיעורי הנקודה A הם: $\boxed{A(-6,0)}$.

ג. אנו כבר יודעים שהנגזרת מתאפסת בנקודות $x=0$ ו-$x=-6$. כמו כן ניתן לראות שמכנה הנגזרת מתאפס עבור $x=-3$ ומכאן שיש לה שם אסימפטוטה אנכית. נרכיב טבלת עלייה וירידה על סמך השרטוט ותוצאות אלו:

תחום x	$x<-6$	$x=-6$	$-6<x<-3$	$x=-3$	$-3<x<0$	$x=0$	$0<x$
סימן הנגזרת לפי השרטוט	−	קיצון	+	אסימפטוטה	+	קיצון	−
הפונקציה עולה/יורדת	↘	min	↗		↗	max	↘

ומכאן שבנקודה $x=0$ יש לפונקציה <u>קיצון מסוג מקסימום</u> ובנקודה $x=-6$ יש לפונקציה <u>קיצון מסוג מינימום</u>.

ד. 1. נמצא את הפונקציה בעזרת האינטגרל:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\frac{9}{(x+3)^2}-1\right)dx=\int\left(9(x+3)^{-2}-1\right)dx=\frac{9(x+3)^{-1}}{-1}-x+C=\frac{-9}{x+3}-x+C$$

נתון שהפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים ולכן מתקיים: $f(0)=0$. נציב כדי למצוא את C:

$$f(0)=0 \rightarrow \frac{-9}{0+3}-0+C=0 \rightarrow -3+C=0 \rightarrow C=3$$

ולכן: $\boxed{f(x)=-\frac{9}{x+3}-x+3}$.

2. נציב את שיעור ה-x של נקודת המינימום בפונקציה שמצאנו ונקבל: $f(-6)=-\frac{9}{-6+3}-(-6)+3=12$.

לכן שיעור ה-y של נקודת המינימום של הפונקציה הוא $\boxed{y=12}$.

ה.