

פונקציית שורש ריבועי (אי רציונאלית)**קדם אנליזה****תחום ההגדרה**

פונקציית שורש ריבועי מוגדרת רק כאשר הביטוי שבתוך השורש הוא אי שלילי (שווה ל-0 או חיובי). כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נבדוק מתי הביטוי **שבתוך השורש** גדול או שווה לאפס.

דוגמא: מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

פתרון: הפונקציה מוגדרת כאשר $0 \leq 4 - x^2$. נפתור את אי השוויון הריבועי: $0 \leq 4 - x^2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

דוגמא: מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$.

פתרון: במקרה זה השורש מופיע במכנה ולכן אינו יכול להתאפס. הפונקציה מוגדרת כאשר:

$$0 < 25 - x^2 \rightarrow -5 < x < 5$$

לסיכום:

כאשר השורש מופיע במכנה, אסור לביטוי שבשורש להתאפס ולכן סימן תחום ההגדרה יהיה: $<$ או $>$.
כשהשורש אינו במכנה, נודא שהביטוי שבשורש **גדול או שווה לאפס** ולכן סימן תחום ההגדרה: $\leq$ או $\geq$.

תרגול - תחום ההגדרה של פונקציית שורש ריבועי

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 16} \quad 3.$$

$$f(x) = \sqrt{12 - 3x} \quad 2.$$

$$f(x) = \sqrt{4x - 8} \quad 1.$$

$$f(x) = \sqrt{7 - x} + \sqrt{x - 2} \quad 6.$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 10x - 9} \quad 5.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10} \quad 4.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad 9.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10 + 5x}} \quad 8.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 8}} \quad 7.$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \quad (*) \quad 12.$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{3-x} \quad (*) \quad 11.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}} \quad 10.$$

ב. עבור כל טענה, קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך:

1. לפונקציה $f(x) = \sqrt{x-3}$ ולפונקציה $g(x) = \sqrt{-x+3}$ יש אותו תחום הגדרה.

2. לפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-10}$ ולפונקציה $g(x) = \sqrt{3x-15}$ יש אותו תחום הגדרה.

3. לפונקציה $f(x) = \sqrt{4x-16}$ ולפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ יש אותו תחום הגדרה.

4. (*) לפונקציה $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+7}$ ולפונקציה $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+7)}$ יש אותו תחום הגדרה.

תשובות: א. 1) $x \geq 2$ 2) $x \leq 4$ 3) $4 \leq x$ או $x \leq -4$ 4) $x \geq 5$ או $x \leq 2$ 5) $-9 \leq x \leq -1$.

6) $2 \leq x \leq 7$ 7) $8 < x$ 8) $-2 < x$ 9) כל x 10) $x > 4$ או $x < 0$ 11) $2 < x \leq 3$ או $x < 2$.

12) $x \geq 2$ או $x < -1$ ב. 1) שגויה. 2) נכונה. 3) שגויה. 4) שגויה.

מציאת שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים

נדגים על הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$:

חיתוך עם ציר ה-y: נציב $x = 0$ ונקבל: $f(x) = \sqrt{4 - 0^2}$. מתקבלת הנקודה: $(0, 2)$.

חיתוך עם ציר ה-x: נשווה את הפונקציה ל-0: $0 = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2, -2$. מתקבלות הנקודות: $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

משוואה אי-רציונאלית

לעיתים, מציאת שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-x כרוכה בפתרון משוואה אי רציונאלית, שבה הנעלם x מופיע בתוך שורש ריבועי. לכן, עלינו ללמוד כיצד לפתור משוואות מסוג זה.

דוגמא 1: פתור את המשוואה: $5 + \sqrt{x + 1} = x$

פתרון: כדי לפתור משוואה אי רציונאלית נקפיד על סדר הפעולות הבא:

1. **נבודד את השורש** לבדו באחד האגפים על ידי העברת אגפים ונקבל: $\sqrt{x + 1} = x - 5$.

2. **נעלה בריבוע** את שני האגפים כך שבאגף שמאל סימן השורש יתבטל. נקפיד להעלות בריבוע את **אגף ימין כולו כביטוי אחד** ולא כל גורם בנפרד.

במקרה זה ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ונקבל: $x + 1 = x^2 - 10x + 25$.

לאחר סידור מתקבלת המשוואה הריבועית: $x^2 - 11x + 24 = 0$ שפתרונותיה: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$.

3. **בדיקת שני הפתרונות** במשוואה המקורית:

העלאת משוואה בריבוע עלולה להוסיף פתרון שאינו פותר את המשוואה המקורית.

לכן, עלינו להציב במשוואה המקורית את שני הפתרונות שקיבלנו, כדי לוודא שמתקבל פסוק אמת:

כשנציב 3 באגפי המשוואה המקורית, מתקבל פסוק השקר: $-2 = 2$ ולכן הפתרון $x_1 = 3$ **לא מתאים**.

כשנציב 8 בשני אגפי המשוואה המקורית, מתקבל השוויון: $3 = 3$ ולכן הפתרון $x_2 = 8$ **מתאים**.

לסיכום: פתרון המשוואה הוא $x = 8$.

דוגמא 2: פתור את המשוואה: $\sqrt{2x^2 - 14} + 2 = 2x - 2$

פתרון: כדי לפתור משוואה אי רציונאלית נקפיד על סדר הפעולות הבא:

1. **נבודד את השורש** לבדו באחד האגפים על ידי העברת אגפים ונקבל: $\sqrt{2x^2 - 14} = 2x - 4$.

2. **נעלה בריבוע** את שני האגפים כך שבאגף שמאל סימן השורש יתבטל. יש להקפיד להעלות בריבוע את **האגף כולו כביטוי אחד** ולא כל גורם בנפרד.

במקרה זה ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ונקבל: $2x^2 - 14 = (2x - 4)^2$.

לאחר סידור מתקבלת המשוואה הריבועית: $x^2 - 8x + 15 = 0$ שפתרונותיה: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

3. **בדיקת שני הפתרונות** במשוואה המקורית:

העלאת משוואה בריבוע עלולה להוסיף פתרון שאינו פותר את המשוואה המקורית.

לכן, עלינו להציב במשוואה המקורית את שני הפתרונות שקיבלנו, כדי לוודא שמתקבל פסוק אמת:

כשנציב 3 בשני אגפי המשוואה המקורית, מתקבל השוויון: $4 = 4$ ולכן הפתרון $x_1 = 3$ **מתאים**.

כשנציב 5 בשני אגפי המשוואה המקורית, מתקבל השוויון: $8 = 8$ ולכן גם הפתרון $x_2 = 5$ **מתאים**.

לסיכום: פתרונות המשוואה הם: $x = 3$, $x = 5$.

פתור את המשוואות הבאות:

חשוב! לאחר פתרון המשוואה יש להציב במשוואה המקורית את ערכי ה- x שהתקבלו כדי לבדוק איזה מהם אכן מקיים אותה.

1. $\sqrt{x}=2$
2. $\sqrt{x-4}=3$
3. $\sqrt{x+5}=1$
4. $\sqrt{-x+8}=\sqrt{2-x}$
5. $\sqrt{x-2}=\sqrt{10-x}$
6. $\sqrt{3x}=\sqrt{x-4}$
7. $3+2\sqrt{x-5}=7$
8. $4-3\sqrt{8-x}=-5$
9. $4=2\sqrt{7x+2}-2$
10. $\sqrt{x}=x$
11. $2\sqrt{x}=x$
12. $\sqrt{x+2}=x$
13. $\sqrt{x}=2-x$
14. $\sqrt{x-3}=x-9$
15. $\sqrt{x+5}=x-1$
16. $\sqrt{3x^2+9}=2x$
17. $x-4\sqrt{x}=0$
18. $x+\sqrt{x-4}=10$
19. $x \cdot \sqrt{4-x}-x=0$
20. $3\sqrt{x+3}+x=7$
21. $3\sqrt{x}+x-5=2\sqrt{x}+15$
22. $2\sqrt{x}=\frac{x+4}{\sqrt{x}}$
23. $\sqrt{x+1}=\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$
24. $\sqrt{2-x}-\frac{x+1}{2\sqrt{2-x}}=0$
25. $\sqrt{x-5}=\frac{6}{\sqrt{x}}$
26. $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}}=4$
27. $2\sqrt{x-2}-\frac{x+2}{\sqrt{x-2}}=0$
28. $x=2\sqrt{x-1}+4$
29. $3-x=2-2\sqrt{x+2}$ (*)
30. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$ (*)
31. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ (*)
32. $2\sqrt{x}-2=\sqrt{x+7}$ (*)
33. $x\sqrt{x-4}=4\sqrt{2x}$ (*)
34. $x\sqrt{x^2-6x-4x}=0$ (*)
35. $\sqrt{3-x}=4+\sqrt{x+13}$ (*)
36. $2\sqrt{4-x}=1+\sqrt{4x+9}$ (*)
37. $2x\sqrt{5-x}+\frac{x^2}{\sqrt{5-x}}=0$ (*)
38. $\sqrt{5x-2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}$ (*)
39. $\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}=\sqrt{2x-12}$ (*)
40. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+10}$ (*)

תשובות:

- 1 (12) 2 (13) 3 (4) 4 (אין פתרון) 5 (6) 6 (אין פתרון) 7 (9) 8 (-1) 9 (10) 10 (0) 11 (4, 0) 12 (2) 13 (1) 14 (12) 15 (4) 16 (3) 17 (0, 16) 18 (8) 19 (0, 3) 20 (1) 21 (16) 22 (4) 23 (אין פתרון) 24 (1) 25 (9) 26 (2) 27 (6) 28 (10) 29 (7) 30 (3) 31 (4) 32 (9) 33 (8) 34 (0, 8) 35 (-13) 36 (0) 37 (0) 38 (0, 4) 39 (8) 40 (13)

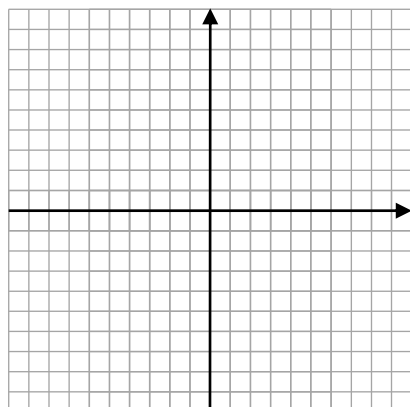


תלמידים מתקדמים בהקבצת 5 יחידות לימוד המעוניינים בשאלות אתגר, **מעל הרמה** הנדרשת בכיתה י', יוכלו להיעזר בברקוד משמאל ולהוריד מאתר הוצאת ארכימדס קובץ שאלות אתגר בנושא משוואות אירציונאליות ובנושאים נוספים.

פונקציית שורש - יישומים גרפיים1. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$.א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מלא את טבלת הערכים הנתונה:

x	-1	0	1	4	9
f(x)					



ג. היעזר בטבלה שמילאת ושרטט על גבי מערכת

הצירים הנתונה סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. קבע האם יש לפונקציה נקודות אפס. נמק.

ה. קבע האם יש לפונקציה נקודות קיצון. נמק.

ו. עבור הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחומי העליה והירידה.

2. תחומי החיוביות והשליליות.

ז. פתור את אי השוויון: $\sqrt{x} < 2$.ח. נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) - 3$. עבור הפונקציה $g(x)$ מצא את:

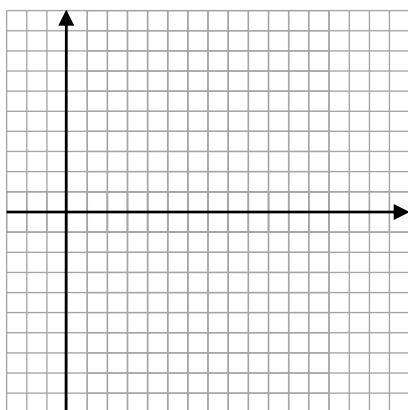
1. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

2. תחומי החיוביות והשליליות.

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{13-x}$.א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מלא את טבלת הערכים הנתונה:

x	-3	4	9	13	17
f(x)					



ג. היעזר בטבלה שמילאת ושרטט על גבי מערכת

הצירים הנתונה סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. קבע האם יש לפונקציה נקודות אפס. נמק.

ה. קבע האם יש לפונקציה נקודת קיצון וקבע את סוגה. נמק.

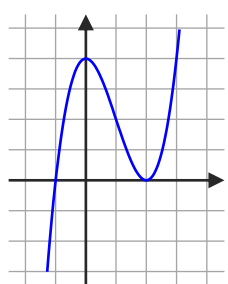
ו. עבור הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחומי העליה והירידה.

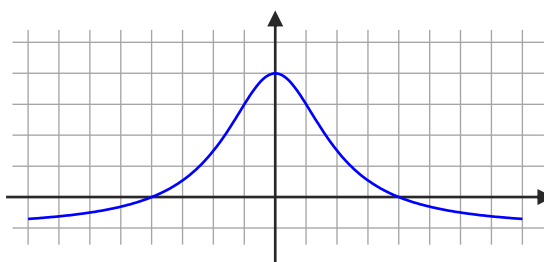
2. תחומי החיוביות והשליליות.

ז. פתור גרפית את אי השוויון: $f(x) < 3$.

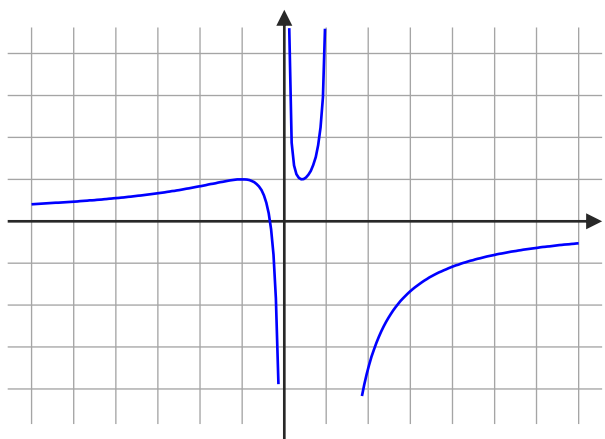
3. בכל סעיף מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$:



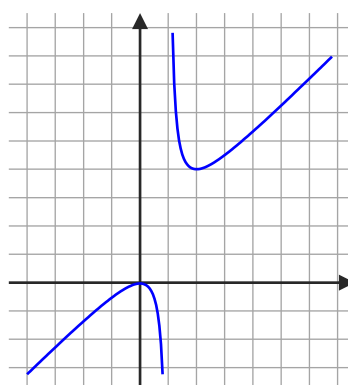
ב.



א.



ד.



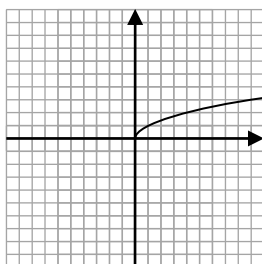
ג.

תשובות:

1) א. $0 \leq x$. ב.

x	-1	0	1	4	9
f(x)	אין	0	1	2	3

ג.



ד. כן. הנקודה: $(0, 0)$. ה. כן. נקודת המינימום: $(0, 0)$.

ו. 1. עליה: $0 < x$, ירידה: $0 < x$. 2. חיוביות: $0 < x$, שליליות: $0 < x$.

ז. $0 \leq x < 4$.

ח. 1. נקודת המינימום: $(0, -3)$. 2. חיוביות: $9 < x$, שליליות: $0 \leq x < 9$.

2) א. $x \leq 13$. ב.

x	-3	4	9	13	17
f(x)	4	3	2	0	אין

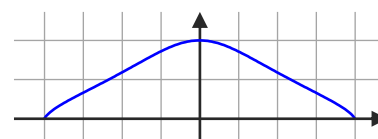
ג. השרטוט משמאל. ד. כן. הנקודה: $(13, 0)$.

ה. כן. נקודת המינימום: $(13, 0)$.

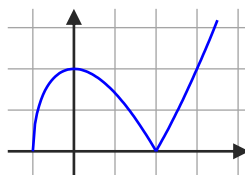
ו. 1. עליה: x , ירידה: $x < 13$. 2. חיוביות: $x < 13$, שליליות: x .

ז. $4 < x \leq 13$.

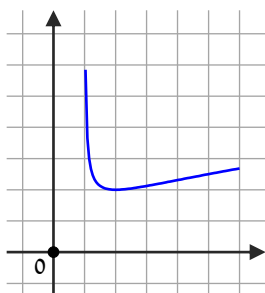
3) א.



ב.



ג.



ד.

